GUÍA DIDÁCTICA DE

ÁLGEBRA LINEAL

Roberto Miranda North

UAP | UNIVERSIDAD ALAS PERUANAS

GUÍA DIDÁCTICA DE
ÁLGEBRA LINEAL

GUÍA DIDÁCTICA DE ÁLGEBRA LINEAL

Roberto Miranda North

UAP UNIVERSIDAD ALAS PERUANAS

UN LIBRO SIEMPRE ES UNA BUENA NOTICIA

FONDO EDITORIAL UAP

GUÍA DIDÁCTICA DE ÁLGEBRA LINEAL

Autor: ROBERTO MIRANDA NORTH
Colaborador: Dr. ESTANISLAO CHUJUTALLI

© UNIVERSIDAD ALAS PERUANAS
Rector: Fidel Ramírez Prado Ph.D
Av. Cayetano Heredia 1092, Lima 11
| e-mail: webmaster@uap.edu.pe |
web-site: www.uap.edu.pe / Teléfono: 266 - 0195
Facultad de Ingeniería y Arquitectura.
Escuela de Sistemas e Informática.
Decano de la Facultad de Ingeniería y Arquitectura:
Oscar Lagravere Von Massenbach, Ph. D

FONDO EDITORIAL
Director: Dr. Omar Aramayo
| e-mail: o_aramayo@uap.edu.pe |
Av. Paseo de la República 1773, La Victoria - Lima
Teléfono: (01) 265 - 5022 anexo (27)

Cuidado de texto: Roberto Arriola Badaracco
Diseño y edición gráfica: Karoll Aguila Zevallos
Impresión: Talleres Gráficos de la Universidad Alas Peruanas.
Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú
N°: 2014-01763
ISBN: 978-612-4097-78-2
Portada sobre un motivo de Kandinsky

Primera edición: Lima, 2014

Librería UAP
Av. Nicolás de Piérola 444
La Colmena - Lima
Teléfono: 330 - 4551
Website: http://libreria.uap.edu.pe

Contenido

Capítulo 4

Espacios, Sub espacios Vectoriales y

Prólogo

Álgebra lineal pertenece al segundo ciclo del Plan Curricular y ha sido concebida para desarrollar el estudio de matrices y determinantes, sistemas de ecuaciones lineales, vectores en R^2, R^3 y R^n, espacios y sub espacios vectoriales, combinaciones lineales, transformaciones lineales, valores y vectores propios, proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt, transformaciones semejantes y diagonalización de matrices.

Álgebra lineal se inicia con el concepto de matriz, que es una noción central en la matemática actual, y constituye una idea unificadora de gran importancia. Por medio de matrices se pueden modelar diversas situaciones en las unidades didácticas que siguen.

Luego, surge el concepto de vectores en R^2, R^3 y R^n, que se emplean en las combinaciones de vectores y las transformaciones lineales de espacios o sub espacios que se trabajan en los espacios vectoriales generales. Se emplea el algoritmo de Gram-Schmidt para crear una base ortogonal de cualquier espacio. Además, se estudia el cambio de base de un espacio o sub espacio vectorial

Posteriormente, se estudian las técnicas de determinación de autovalores y autovectores de la matriz de coeficientes de un sistema lineal y la diagonalización de matrices cuadradas que, luego, permiten desarrollar el proceso o algoritmo de Gram-Schmidt para la diagonalización ortogonal de una matriz simétrica.

A continuación, se presentan los conocimientos que el estudiante tiene que traer consigo al momento de iniciarse en el curso de Álgebra Lineal: propiedades del sistema de los números reales, funciones de variable real, álgebra y geometría elementales, métodos de solución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones, sistemas de coordenadas cartesianas en R^2 y R^3, la recta y el plano en R^2 y R^3.

Ing. Roberto Miranda North
Docente de Álgebra Lineal

Presentación

Nuestra recompensa se encuentra en el esfuerzo y no en el resultado.
Un esfuerzo total es una victoria completa.
Mahatma Gandhi (1869-1948)

Estimado alumno de la Universidad Alas Peruanas:

Esta misiva es portadora de la alegría de poder contar con usted como distinguido miembro de esta Casa de Estudios.

Le presentamos al Ingeniero Roberto Miranda North, el docente que la Universidad Alas Peruanas designó para el desarrollo de las asignaturas en las escuelas profesionales de Ingenierías.

El docente Miranda North es Ingeniero Electrónico colegiado, graduado en la Universidad Nacional de Ingeniería (UNI) en 1992. Cuenta con cuatro años de experiencia docente universitaria a nivel de pregrado.

Matiza los temas de la asignatura con los conocimientos que ha ido recogiendo en su trayectoria laboral como ingeniero de proyectos y mantenimiento en diversos sectores de la actividad económica: industrial, comercial, telecomunicaciones, salud y gobierno.

También tuvo a cargo las asignaturas de Matemática I y II, Matemática Básica I, Cálculo Vectorial y otros cursos de especialidad en ingeniería.

Actualmente, se encuentra cursando estudios de Maestría en Administración y Dirección de Empresas en la Universidad Alas Peruanas.

Siguió estudios de Educación Abierta y a Distancia en el VII Diplomado organizado por la Dirección Universitaria de Educación a Distancia (DUED) de la misma casa de estudios, en el 2009.

El docente espera su comunicación en la siguiente dirección de correo: r_miranda@mail.uap.edu.pe

Estimado alumno, formulamos nuestros mejores votos para que usted haga realidad sus justas aspiraciones en la travesía iniciada hace unos meses.

Objetivos

La asignatura Álgebra lineal tiene el siguiente objetivo general:

Emplear las principales técnicas del Álgebra lineal en la elaboración de modelos matemáticos como una herramienta para la investigación, descripción y aplicación adecuada de alternativas de solución a problemas de la ingeniería.

Unidad Didáctica	Objetivos Específicos	Semana de estudios
	-Reconocer los distintos tipos de matrices.	1
I	-Realizar operaciones con matrices.	1
	-Resolver determinantes de orden n x n.	2

II	-Reconocer las formas de una ecuación lineal y de un sistema de ecuaciones lineales.	3
	-Resolver un sistema lineal.	
III	-Reconocer los vectores en los espacios R^2, R^3 y R^n. -Efectuar operaciones de vectores en los espacios R^2, R^3 y R^n.	4
IV	-Reconocer los distintos espacios y sub espacios vectoriales.	5
	-Establecer la dependencia y la independencia lineal de vectores en un espacio o sub espacio vectorial. -Hallar las bases de los espacios y sub espacios vectoriales.	6
	-Reconocer las diversas transformaciones lineales y sus matrices asociadas. -Efectuar operaciones de transformaciones lineales. -Determinar el núcleo y la imagen, y cambiar la base de una transformación lineal.	7
	-Calcular los autovalores y autovectores de un matriz cuadrada.	8
	-Interpretar el proceso de Gram-Schmidt en un espacio R_n.	8

V	-Hallar las bases ortogonales y ortogonales de un espacio o sub espacio.	
	-Interpretar el proceso de Gram-Schmidt en un espacio diferente a Rn. -Hallar las bases ortogonales y orto-normales de un espacio general.	
	-Aplicar las transformaciones semejantes en la obtención de la matriz diagonal u ortogonal de la matriz de autovectores.	

Contenidos

Los contenidos de la asignatura Álgebra lineal están distribuidos según la semana de estudio, de acuerdo al sílabo de las escuelas profesionales de ingeniería.

Primera Unidad Didáctica

Matrices y Determinantes

Objetivo General

Utilizar el conocimiento matemático para interpretar los conceptos de matrices y determinantes como instrumento principal, para poder investigar, describir y aplicar adecuadamente a la ingeniería.

Unidad Didáctica	Objetivos Específicos	Contenidos	Semana de estudios
	-Reconocer las distintas clases de matrices	-Definición, notación, elementos y orden de una matriz. -Formas detallada y abreviada de una matriz. -Igualdad de matrices. -Tipos de matrices y tipos de matriz cuadrada.	1

I **Matrices** **y** **Determinantes**	-Realizar operaciones con matrices	-Adición, sustracción, multiplicación por un escalar, producto de una matriz fila por una matriz columna, multiplicación de matrices, potenciación, operaciones elementales en filas, matriz escalonada, rango de una matriz, inversa de una matriz.	1
I **Matrices** **y** **Determinantes**	-Resolver determinantes de orden n x n	-Definición y órdenes de determinante. -Cálculo de la determinante de segundo orden. -Cálculo de la determinante de tercer orden: Métodos de Sarrus, el de las sub matrices en una columna y el del pivote.	2

I **Matrices** **y** **Determinantes**	-Realizar operaciones con matrices	-Cálculo de la determinante de orden superior: Métodos de las sub matrices en una columna y el del pivote. Cálculo de la determinante de una matriz triangular. -Propiedades de las matrices y de las determinantes.	2

Segunda Unidad Didáctica

Sistemas de ecuaciones lineales

Objetivo General

Reconocer y resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Unidad Didáctica	Objetivos Específicos	Contenidos	Semana de estudios
II **Sistemas de ecuaciones lineales**	-Reconocer las formas de una ecuación lineal y de un sistema de ecuaciones lineales	-La ecuación lineal: formas algebraica y matricial de una ecuación lineal; vector solución; casos de soluciones y de ecuaciones, -El sistema de ecuaciones lineales: formas algebraica y matricial de un sistema de ecuaciones lineales; vector solución.	3

II **Sistemas de Ecuaciones Lineales**	-Resolver un sistema lineal	-Tipos de sistemas lineales: sistemas cuadrado, rectangular y homogéneo.	3
		-Consistencia de un sistema lineal. -Solución de un sistema lineal: métodos de Crammer y de Gauss-Jordan. -Solución de un sistema rectangular: método de reducción a la forma escalonada en filas. -Solución de un sistema homogéneo: método de reducción a la forma escalonada en filas.	3

Tercera Unidad Didáctica

Vectores en R^2, R^3 y R^n

Objetivo General

Reconocer y efectuar operaciones de vectores en los espacios de R^2, R^3 y R^n.

Unidad Didáctica	Objetivos Específicos	Contenidos	Semana de estudios
III **Vectores en R^2, R^3 y R^n**	-Reconocer los vectores en los espacios R^2, R^3 y R^n. -Efectuar operaciones de vectores en los espacios R^2, R^3 y R^n.	-Vectores: definición y notación de vectores. -Vectores en R^2: definición de un vector en R^2, igualdad de vectores, norma y dirección de un vector en R^2, los dos vectores canónicos en R^2, vector unitario en R^2. Operaciones con vectores en R^2.	4

III **Vectores** **en** **R^2, R^3 y R^n**	-Resolver un sistema lineal	-Vectores en R^3: definición de un vector en R^3, igualdad de vectores, norma y dirección de un vector en R^3, los tres vectores canónicos en R^3, vector unitario en R^3. Operaciones con vectores en R^3. -Vectores en R^n: definición de un vector en R^n, igualdad de vectores, norma y dirección de un vector en R^n, los vectores canónicos en R^n, vector unitario en R^n. Operaciones con vectores en R^n. -Propiedades de los vectores.	4

Cuarta Unidad Didáctica

Espacios y sub espacios vectoriales
Transformaciones lineales

Objetivo General

Reconocer los distintos espacios, sub espacios y transformaciones lineales; y efectuar operaciones de vectores, matrices, polinomios y otros objetos en R^2, R^3, R^n y otros espacios vectoriales en general.

Unidad Didáctica	Objetivos Específicos	Contenidos	Semana de estudios
IV **Espacios y sub espacios vectoriales** **y** **Transformaciones lineales**	-Reconocer los distintos espacios y sub espacios.	-Espacio vectorial: definición y propiedades de un espacio vectorial. -Espacios vectoriales sobre R^1, R^2, R^3 y R^n. -Otros espacios vectoriales: espacio vectorial M, espacio vectorial P, espacio vectorial F, espacio vectorial complejo C.	5

IV **Espacios y sub espacios vectoriales** **y** **Transformaciones lineales**		-Sub espacio vectorial: definición y propiedades de un sub espacio vectorial.	5
	-Establecer la dependencia y la independencia lineal de vectores en un espacio o sub espacio vectorial. -Hallar las bases de los espacios y sub espacios vectoriales.	-Combinación lineal de vectores. -Dependencia de vectores: vectores linealmente independientes, vectores linealmente dependientes. -Vectores generadores, base y dimensión de un espacio vectorial y de un sub espacio vectorial.	6
	-Reconocer las diversas transformaciones lineales y sus matrices asociadas.	-Transformaciones lineales: definición. -Operaciones con transformaciones lineales:suma, multiplicación por un escalar, composición e inversa de una transformación lineal.	7

IV **Espacios y sub espacios vectoriales** **y** **Transformaciones lineales**	-Efectuar operaciones de transformaciones lineales. -Determinar el núcleo y la imagen, y cambiar la base de una transformación lineal.	-Determinación del núcleo y la imagen de una transformación lineal. -Matrices asociadas a transformaciones lineales y sus relaciones. -Matriz canónica o matriz estándar de una transformación lineal. -Transformación lineal asociada a una matriz; matriz asociada a una transformación lineal. -Matriz de cambio de base de transformaciones lineales. -Matriz asociada del sistema y el conjunto solución. -Dimensión del espacio solución de un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.	7

Quinta Unidad Didáctica

Autovalores y autovectores
Diagonalización de matrices

Objetivo General

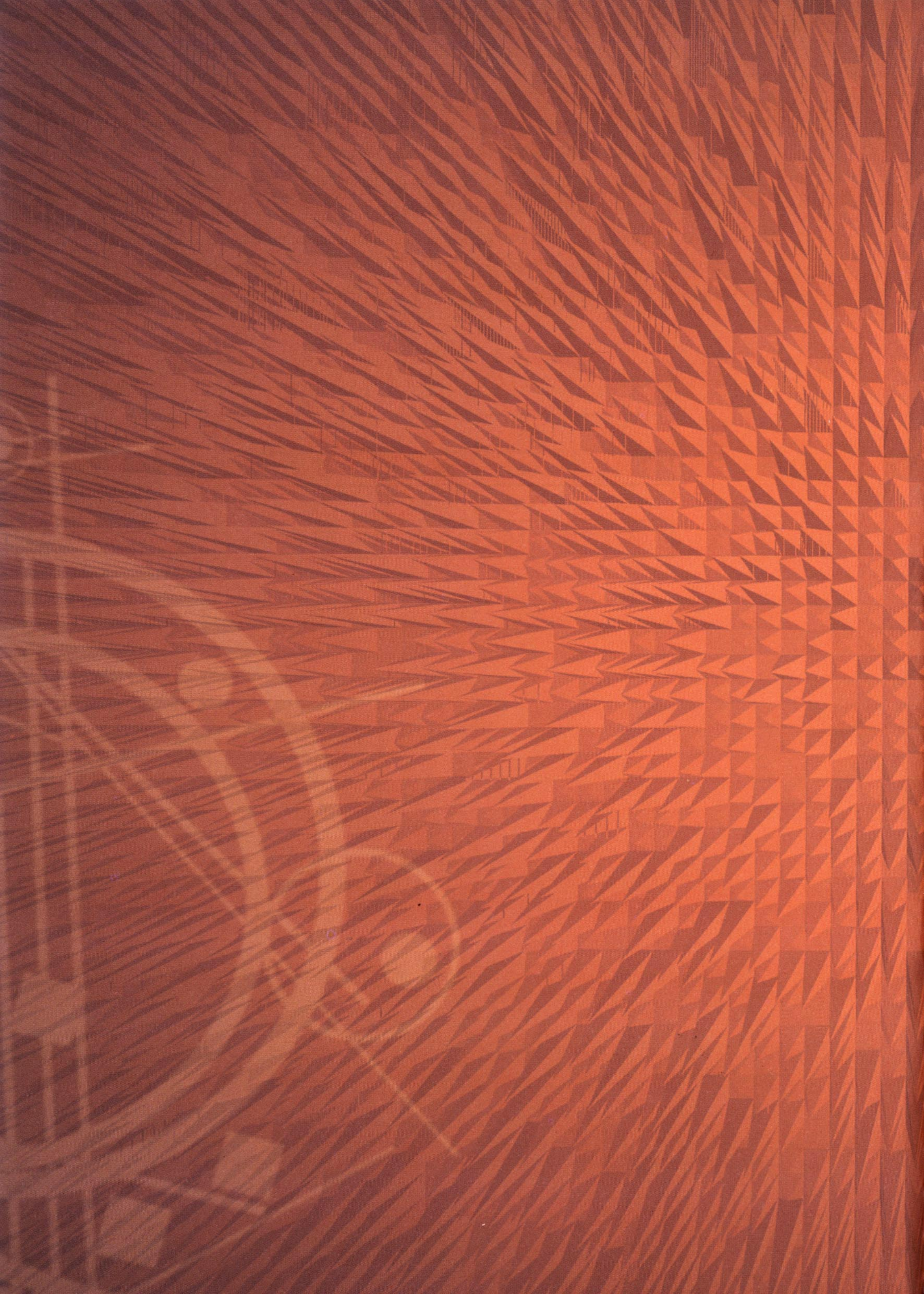
Reconocer la matriz de autovectores de la matriz de coeficientes de un sistema lineal. Aplicar las transformaciones semejantes en la obtención de la matriz diagonal u ortogonal de la matriz de autovectores.

Interpretar el proceso de Gram-Schmidt para transformar la base de un espacio en una base ortogonal y ortonormal.

Unidad Didáctica	Objetivos Específicos	Contenidos	Semana de estudios
	-Calcular los autovalores y autovectores de un matriz cuadrada.	-Autovalores y autovectores: definición y modo práctico de encontrar los autovalores y autovectores.	8

	-Interpretar el proceso de Gram-Schmidt en un espacio R^n. -Hallar las bases ortogonales y ortogonales de un espacio o sub espacio.	-Bases ortogonales y ortonormales: definición. -Proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt en Rn. -Normalización de un conjunto S ortogonal.	8
V **Autovalores y Autovectores** **y** **diagonalización de matrices**	-Interpretar el proceso de Gram-Schmidt en un espacio diferente a Rn. -Hallar las bases ortogonales y ortogonales de un espacio general.	-Producto interno, norma y vectores ortogonales en otros espacios vectoriales diferentes de R^n. -Proceso de Gram-Schmidt en otros espacios diferentes de R^n.	8
	-Aplicar las transformaciones semejantes en la obtención de la matriz diagonal u ortogonal de la matriz de autovectores.	-Diagonalización de matrices: transformaciones semejantes y matriz diagonalizable. -Verificación de una matriz diagonalizable. -Proceso de diagonalización de una matriz cuadrada.	8

		-Proceso de diagonalización ortogonal de una matriz simétrica.	8



I Unidad Didáctica

Matrices y determinantes

Introducción

La ciencia y la ingeniería administran mediciones y proyecciones de aquellas variables que describen el comportamiento de un proceso determinado en general. Para tal fin, los datos y resultados que generan dichas mediciones y proyecciones se registran en arreglos que pueden tener una forma similar a las tablas.

Se puede decir que las matrices son herramientas matemáticas que tienen la forma de arreglos de datos y resultados, y son muy fáciles de manejar. De esta manera, una matriz puede representar un sistema de ecuaciones lineales, aplicaciones lineales, productos, formas cuadráticas y cónicas, etc.

Se da a conocer los tipos de matrices y sus propiedades, las operaciones matriciales tales como suma, multiplicación por un escalar y otras más.

También, se estudia la determinante entendida como una función de una matriz y se revisan diversas formas de calcularla. Se puede utilizar para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales mediante la regla de Cramer, saber si una matriz cuadrada es invertible o no, etc.

Los números reales serán los elementos de las matrices a menos que se indique otra cosa.

1.1 Matrices

1.1.1 Definición de matriz

Es aquel conjunto de objetos distribuidos en filas y columnas, y encerrados entre paréntesis o corchetes.

Ejemplo 1:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 9 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \pi & 7/9 \\ e & 21.3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & e & \pi & 4 & 6 \\ 3 & 9.5 & 8 & 9 & 1024 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 46.96 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & \pi \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

1.1.2 Notación de una matriz

Una matriz se denota con una letra mayúscula

Ejemplo 2:

Sea A la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Entonces:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3:

Sea B la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Entonces:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

1.1.3 Elementos de una matriz

Los elementos de una matriz son aquellos objetos que se encuentran en ella.

Ejemplo 4:

Sea A la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Entonces:

Los elementos de A son 1, 2, 3 y 4.

1.1.4 Filas de una matriz

La fila de una matriz es cualquier hilera horizontal de objetos de la matriz mencionada.

Ejemplo 5:

Sea C la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Entonces:

La hilera horizontal con elementos 1 y 2 es la primera fila de la matriz C.

La hilera horizontal con elementos 3 y 4 es la segunda fila de la matriz C.

1.1.5 Columnas de una matriz

La columna de una matriz es cualquier hilera vertical de objetos de la matriz mencionada.

Ejemplo 6:

Sea C la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Entonces:

La hilera vertical con elementos 1 y 3 es la primera columna de la matriz C.

La hilera horizontal con elementos 2 y 4 es la segunda columna de la matriz C.

1.1.6 Notación de los elementos de una matriz

En general, un elemento se denota con una letra minúscula con dos subíndices.

Donde: a_{ij}

i es el subíndice que representa a la i-ésima fila de la matriz mencionada.

j es el subíndice que representa a la j-ésima columna de la matriz mencionada.

a_{ij} es el elemento que se halla cruzando la i-ésima fila con la j-ésima columna.

El elemento va en minúscula ya que la matriz se denota con letra mayúscula.

Ejemplo 7:

Sea D la matriz $\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \end{pmatrix}$.

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \end{pmatrix}$$

Se observa que la matriz D tiene una sola fila con dos columnas.

El elemento d_{11} se halla en la primera fila con la primera columna.

El elemento d_{12} se halla en la primera fila con la segunda columna

Se observa que la letra d minúscula es al elemento como la D mayúscula es a la matriz.

Ejemplo 8:

Sea E la matriz $\begin{pmatrix} 91 & \sqrt[3]{8} \end{pmatrix}$.

$$E = \begin{pmatrix} 91 & \sqrt[3]{8} \end{pmatrix}.$$

Se observa que la matriz E tiene una sola fila con dos columnas.

El elemento 91 se halla en la primera fila con la primera columna.

El elemento $^{3}\,8$ se halla en la primera fila con la segunda columna.

También, $e_{11} = 91$ y $e_{12} = {}^{3}\,8$

Se observa que la letra e minúscula es al elemento como la E mayúscula es a la matriz.

Ejemplo 9:

Sea F la matriz $\begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ f_{31} \end{pmatrix}$

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ f_{31} \end{pmatrix}$$

Se observa que la matriz F tiene una sola columna con tres filas.

El elemento f_{11} se halla en la primera fila con la primera columna.

El elemento f_{21} se halla en la segunda fila con la primera columna.

El elemento f_{31} se halla en la tercera fila con la primera columna.

Se observa que la letra f minúscula es al elemento como la F mayúscula es a la matriz.

Ejemplo 10:

Sea G la matriz $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$G = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Se observa que la matriz G tiene una sola columna con tres filas.

El elemento 1 se halla en la primera fila con la primera columna.

El elemento 2 se halla en la segunda fila con la primera columna.

El elemento 3 se halla en la tercera fila con la primera columna.

También, $g_{11} = 1$, $g_{21} = 2$ y $g_{31} = 3$.

Se observa que la letra g minúscula es al elemento como la G mayúscula es a la matriz.

1.1.7 Orden o tamaño de una matriz

El orden de una matriz indica el número de filas y columnas que se observan en la matriz. El orden se denota con mxn.

Valga la aclaración que mxn no indica multiplicación alguna. Más bien, indica el número m de filas y el número n de columnas que posee una matriz.

Ejemplo 11:

Sea H la matriz $\left(h_{11}\right)$

H tiene una fila y una columna. Entonces, el orden de la matriz H es 1x1.

Ejemplo 12:

Sea L la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$

L tiene dos filas y cinco columnas. Entonces, el orden de la matriz L es 2x5.

Ejemplo 13:

Sea P la matriz $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \end{pmatrix}$

P tiene dos filas y cinco columnas. Entonces, el orden de la matriz P es 2x5.

1.1.8 Forma detallada de una matriz

En general, una matriz A de orden mxn se puede representar en forma detallada, tal como se indica en la siguiente expresión:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

1.1.9 Forma abreviada de una matriz

En general, una matriz A de orden mxn se puede representar en forma abreviada tal como se indica en la siguiente expresión:

$$A = (a_{ij})_{mxn}$$

Ejemplo 14:

Sea A la matriz $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \end{pmatrix}$

Como el orden de la matriz A es 2x5.

Entonces, esta matriz se puede representar en forma abreviada tal como se muestra a continuación:

$$A = \left(a_{ij}\right) 2x5$$

1.1.10 Igualdad de dos matrices

Dos matrices se definen como matrices iguales cuando se cumple las siguientes condiciones:

i) Son del mismo orden mxn.

ii) Cada elemento de la primera matriz es idéntico al respectivo elemento de la segunda matriz.

Ejemplo 15:

Sean las matrices F y G

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ f_{31} \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Verificando que:

i) F y G tengan el mismo orden

El orden de F es 3x1 y el orden de G es 3x1. Se observa que F y G tienen el mismo orden.

ii) los elementos de la primera sean iguales a los elementos de la segunda respectivamente.

Para que F sea igual a G se requiere que $f_{11} = 1$, $f_{21} = 2$ y $f_{31} = 3$.

Ejemplo 16:

Sean las matrices

$$F = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Verificando que:

i) F y G tengan el mismo orden

El orden de F es 3x1 y el orden de G es 3x1. Se observa que F y G tienen el mismo orden.

ii) los elementos de la primera sean iguales a los elementos de la segunda respectivamente.

$$\begin{array}{lcl} 9 \neq 1 & \rightarrow & f_{11} \neq g_{11} \\ 5 \neq 2 & \rightarrow & f_{21} \neq g_{21} \\ 0 \neq 3 & \rightarrow & f_{31} \neq g_{31} \end{array}$$

Se observa que el elemento de una matriz no es idéntico al respectivo elemento de la otra matriz. Por lo tanto, se concluye que dichas matrices no son iguales.

1.1.11 Tipos de matrices

1.1.11.1 Matriz fila

La matriz fila es aquella matriz con orden 1xn. A la matriz fila se le conoce también como vector fila.

En general, una matriz fila se denota por

$$(a_{ij})_{1 \times n}$$

Ejemplo 17:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 91 & {}^{3}8 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & (n-1) & n \end{bmatrix}$$

1.1.11.2 Matriz columna

La matriz columna es aquella matriz con orden nx1. A la matriz columna se le conoce también como vector columna.

En general, una matriz columna se denota por

$$\left(a_{ij}\right)_{n\,x\,1}$$

Ejemplo 18:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ . \\ . \\ . \\ (n-1) \\ n \end{bmatrix}$$

1.1.11.3 Matriz nula o matriz cero

Una matriz nula también es conocida como matriz cero. Los elementos de una matriz nula son todos iguales a cero. El orden de cualquier matriz nula es mxn.

Ejemplo 19:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{1\,x\,4} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3\,x\,5} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{3\,x\,1}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{2\,x2}$$

Una matriz nula o cero se denota por O (O mayúscula). El orden de una matriz cero se deduce por el contexto en el que se encuentre.

1.1.11.4 Matriz cuadrada

Una matriz cuadrada está definida cuando se cumple que el número de filas es igual al número de columnas.

En general, una matriz cuadrada se denota así:

$$\left(a_{ij}\right)_{n \times n}$$

Dependiendo de las diversas formas de arreglos de orden nxn, se pueden distinguir las siguientes clases de matrices cuadradas:

a) Matriz triangular superior

Aquella matriz cuadrada donde se cumple que $\forall i > j : a_{ij} = 0$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

b) Matriz triangular inferior

Aquella matriz cuadrada donde se cumple que $\forall i < j : a_{ij} = 0$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

c) Matriz diagonal

Aquella matriz cuadrada donde se cumple que:

$$\forall i \neq j : a_{ij} = 0$$

$$\forall i = j : a_{ij} \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

d) Matriz escalar

Aquella matriz cuadrada donde se cumple que:

$$\forall i \neq j \;:\; a_{ij} = 0$$

$$\forall i = j \;:\; a_{ij} = k$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & k & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k \end{pmatrix}$$

e) Matriz identidad

La matriz identidad es aquella matriz cuadrada que se define cuando se cumplen las siguientes condiciones:

$$\forall i \neq j \;:\; aij = 0$$

$$\forall i = j \;:\; aij = 1$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \quad \mathrm{I}$$

Una matriz identidad se denota por I. El orden de una matriz identidad se deduce por el contexto en el que se encuentre.

f) Matriz transpuesta

Sea la matriz A = $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

La matriz transpuesta de A se denota como A^T. Se lee "A Txranspuesta".

Para obtener la transpuesta de A, se debe hacer la siguiente transformación:

La fila i de la matriz A se convierte en la columna i de su transpuesta.

Se empieza tomando la primera fila de A y convirtiéndola en columna. Se toma la segunda fila, se convierte en columna. Y se continúa con las demás filas de A.

Ejemplo 20:

La fila $a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ \ldots\ a_{1n}$ se transforma en la columna

$$\begin{array}{c} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ . \\ . \\ a_{1n} \end{array}$$

La fila $a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ \ldots\ a_{2n}$ se transforma en la columna

$$\begin{array}{c} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \\ . \\ . \\ a_{2n} \end{array}$$

La fila $a_{31}\ a_{32}\ a_{33} \ldots a_{3n}$ se transforma en la columna

$$\begin{matrix} a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \\ . \\ . \\ a_{3n} \end{matrix}$$

La fila $a_{n1}\ a_{n2}\ a_{n3} \ldots a_{nn}$ se transforma en la columna

$$\begin{matrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ a_{n3} \\ . \\ . \\ a_{nn} \end{matrix}$$

Reescribiendo las nuevas columnas, la matriz transpuesta de A queda así:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \dots & a_{n3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

g) Matriz simétrica

$$\text{Sea la matriz } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

La matriz A es simétrica si se cumple la siguiente condición:

$$A = A^T$$

Usando su forma detallada, se debe cumplir la misma condición.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \dots & a_{n3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

h) Matriz antisimétrica

Sea la matriz A $= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

La matriz A es antisimétrica si se cumple la siguiente condición:

$$A = -A^T$$

Usando su forma detallada:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n} = - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \dots & a_{n3} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

i) Matriz ortogonal

Sea la matriz $A = (a_{ij})_{n \times n}$

La matriz A será una matriz ortogonal si se cumple la siguiente condición:

$$A.A^T = A^T.A = I$$

j) Matriz invertible

Una matriz invertible es aquella matriz cuadrada que tiene inversa. Para que una matriz tenga inversa, el determinante de la matriz cuadrada debe ser diferente de cero. Véase la sección 1.3 de Determinantes y la sección 1.2.10 de Inversa de una matriz.

k) Matriz singular

Una matriz singular es aquella matriz cuadrada que no tiene inversa.

Véase la sección 1.2.10 de Inversa de una matriz.

1.2 Operaciones con matrices

1.2.1. Adición

Sean $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ dos matrices del mismo tamaño, mxn. La adición A+B de estas dos matrices es la matriz $C=(c_{ij})$ de mxn, donde:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Ejemplo 21:

Sean las matrices

$$B= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Entonces, la adición es:

$$A+B= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A+B= \begin{pmatrix} 1+1 & 2+1 \\ 3+1 & 4+1 \end{pmatrix}$$

$$A+B= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

1.2.2. Multiplicación por un escalar

Sean $A = (a_{ij})$ una matriz de mxn y r un escalar o número real. El producto rA del escalar r y la matriz A, es la matriz $B = (b_{ij})$ del mismo tamaño que A, donde:

$$b_{ij} = ra_{ij}$$

Ejemplo 22:

Sean un escalar r=10 y A la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Entonces, la multiplicación del escalar r por la matriz A es:

$$rA = 10 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$rA = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \end{pmatrix}$$

1.2.3. Sustracción

Sean $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ dos matrices del mismo tamaño mxn. La sustracción A-B de estas dos matrices es la matriz $C=(c_{ij})$ de mxn, donde:

$$c_{ij} = a_{ij} + (-1).b_{ij}$$

Ejemplo 23:

Sean las matrices

$$B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$$

Entonces, la sustracción es:

$$A-B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$A-B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$$

$$A-B=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}$$

1.2.4. Producto de una matriz fila por una matriz columna

Sean $A = (a_{1j})$ una matriz fila de tamaño 1xk y $B = (b_{j1})$ una matriz columna de tamaño kx1.

El producto A.B de estas dos matrices es el escalar c, donde:

$$c_{11} = \sum_{j=1}^{k} a_{1j}.b_{j1}$$

Expresándolo en forma detallada:

$$c_{11} = a_{11}.b_{11} + a_{12}.b_{21} + a_{13}.b_{31} + \ldots + a_{1k}.b_{k1}$$

Ejemplo 24:

Sean A y B una matriz fila 1x2 y una matriz columna 2x1 respectivamente. Donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Entonces, el producto de A_{1x2} por B_{2x1} es C_{1x1}

iguales

$$A.B = C = \begin{bmatrix} 2x3 + 5x4 \end{bmatrix}$$

$$A.B = C = \begin{bmatrix} 6 + 20 \end{bmatrix}$$

$$A.B = C = \begin{bmatrix} 26 \end{bmatrix}$$

1.2.5. Multiplicación de matrices

Sean A = (a_{ik}) una matriz de mxn y B = (b_{kj}) una matriz de nxs. La multiplicación A.B está definida solo cuando el número de columnas de A es igual al número de filas de B.

La matriz producto A.B es la matriz C = (c_{ij}) de m x s, donde cij es el producto del i-ésimo vector fila de A y el j-ésimo vector columna de B.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}.b_{k1}$$

Expresando A.B en forma detallada:

$$C = A.B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2s} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3s} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{ns} \end{pmatrix}$$

Cada fila de A se multiplica por todas las columnas de B para obtener cada elemento de C.

Tal como se puede apreciar a continuación:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2s} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & c_{3s} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \dots & c_{ms} \end{pmatrix}$$

$$(a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ \dots\ a_{2n}) . \begin{pmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \\ . \\ . \\ b_{n3} \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, el elemento c_{23} es un escalar que resulta de multiplicar la fila 2 de A con la columna 3 de B.

$$c_{23} = (a_{21}\ \ a_{22}\ \ a_{23}\ \ \ldots\ \ a_{2n}) \cdot \begin{pmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \\ . \\ . \\ bn3 \\ \end{pmatrix}$$

$$c_{23} = a_{21}.b_{13} + a_{22}.b_{23} + a_{23}.b_{33} + \ \ldots\ + a_{2n}.b_{n3}$$

$$c_{23} = \sum_{k=1}^{n} a_{2k}.b_{k3}$$

Como la matriz C es de tamaño m x s, se tienen m filas y s columnas.

Los elementos de la columna 1 son $c_{11}, c_{21}, c_{31} \ldots c_{m1}$

$$c_{11} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}.b_{k1} = a_{11}.b_{11} + a_{12}.b_{21} + a_{13}.b_{31} + \ \ldots\ + a_{1n}.b_{n1}$$

$$c_{21} = \sum_{k=1}^{n} a_{2k}.b_{k1} = a_{21}.b_{11} + a_{22}.b_{21} + a_{23}.b_{31} + \ \ldots\ + a_{2n}.b_{n1}$$

$$c_{23} = \sum_{k=1}^{n} a_{2k}.b_{k3} = a_{21}.b_{13} + a_{22}.b_{23} + a_{23}.b_{33} + \ \ldots\ + a_{2n}.b_{n3}$$

.

.

.

$$c_{m1} = \sum_{k=1}^{n} a_{mk}.b_{k1} = a_{m1}.b_{11} + a_{m2}.b_{21} + a_{m3}.b_{31} + \ldots + a_{mn}.b_{n1}$$

Los elementos de la columna 2 son c_{12}, c_{22}, $c_{32}\ldots$ c_{m2}

$$c_{12} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}.b_{k2} = a_{11}.b_{12} + a_{12}.b_{22} + a_{13}.b_{32} + \ldots + a_{1n}.b_{n2}$$

$$c_{22} = \sum_{k=1}^{n} a_{2k}.b_{k2} = a_{21}.b_{12} + a_{22}.b_{22} + a_{23}.b_{32} + \ldots + a_{2n}.b_{n2}$$

.

.

.

$$c_{m2} = \sum_{k=1}^{n} a_{mk}.b_{k2} = a_{m1}.b_{12} + a_{m2}.b_{22} + a_{m3}.b_{32} + \ldots + a_{mn}.b_{n2}$$

Los elementos de la columna s son c_{1s}, c_{2s}, $c_{3s}\ldots$ c_{ms}

$$c_{1s} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}.b_{ks} = a_{11}.b_{1n} + a_{12}.b_{2n} + a_{13}.b_{3n} + \ldots + a_{1n}.b_{nn}$$

$$c_{2s} = \sum_{k=1}^{n} a_{2k}.b_{ks} = a_{21}.b_{1n} + a_{22}.b_{2n} + a_{23}.b_{3n} + \ldots + a_{2n}.b_{nn}$$

.

.

.

$$c_{ms} = \sum_{k=1}^{n} a_{nk}.b_{ks} = a_{m1}.b_{1s} + a_{m2}.b_{2s} + a_{m3}.b_{3s} + \ldots + a_{mn}.b_{ns}$$

Ejemplo 25:

Sean A y B una matriz 2x3 y una matriz 3x1, respectivamente

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Entonces, el producto de A_{2x3} por B_{3x1} es C_{2x1}

$$\boxed{=}$$

$$A.B = C = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A.B = C = \begin{bmatrix} Fila1xColumna \\ Fila2xColumna \end{bmatrix}$$

Fila1xColumna es $\begin{bmatrix} 9 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = (9)(1)+(1)(2)+(0)(3) = 9 + 2 + 0 = 11$

Fila2xColumna es $\begin{bmatrix} 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = (7)(1)+(0)(2)+(1)(3) = 7 + 0 + 3 = 10$

$$A.B = C = \begin{bmatrix} 11 \\ 10 \end{bmatrix}$$

1.2.6. Potenciación

Sea A una matriz de tamaño nxn. La matriz potencia q de A es la multiplicación de A por sí misma q veces. Se denota por A^q y la potenciación está definida solo cuando A es una matriz cuadrada.

$$A^q = A.A.A\ldots A$$

A se multiplica a sí misma q veces.

Ejemplo 26:

Sea A una matriz cuadrada 2x2.

Entonces:

$$A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1x1+2x3 & 1x2+2x4 \\ 3x1+4x3 & 3x2+4x4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1+6 & 2+8 \\ 3+12 & 6+16 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}$$

1.2.7. Operaciones elementales en filas

1.2.7.1. Definición

Son aquellas operaciones aritméticas que se efectúan en las filas de una matriz para transformarla en otra sin cambiar su rango. Véase la sección 1.2.9 de rango de una matriz.

Las operaciones elementales en fila sirven para facilitar el análisis de los modelos y sistemas matriciales.

Si la matriz B se puede obtener de la matriz A mediante operaciones elementales en las filas, entonces B es equivalente en filas a A.

1.2.7.2. Procedimientos de operaciones elementales en filas

Las operaciones elementales en las filas están definidas en tres procedimientos: intercambio de filas, cambio de escala de una fila y suma de filas.

1.2.7.2.1. Intercambio de filas

Intercambia dos vectores fila en una matriz.

Ejemplo 27:

Sea la matriz $\begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}$

Intercambiando los vectores fila (7 10) con (15 22) queda:

$$\begin{bmatrix} 15 & 22 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}$$

1.2.7.2.2. Cambio de escala de una fila

Multiplica cualquier vector fila de la matriz por una constante distinta de cero.

Ejemplo 28:

Sea la matriz $\begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}$

$3F_1$: Multiplicando el vector fila (7 10) por la constante 3

$3F_1$ (3x7 3x10) = (21 30)

Queda: $\begin{bmatrix} 21 & 30 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}$

1.2.7.2.3. Suma de filas

Reemplaza cualquier vector fila de la matriz por la suma de sí mismo con un múltiplo de un vector fila diferente.

Ejemplo 29:

Sea la matriz $\begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}$

$F_2 + 3F_1$: Sumando el vector (15 22) con el triple del vector (7 10)

$$\begin{array}{ll} 3F_1 & (21 \quad 30) \\ F_2 & \underline{(15 \quad 22)} \\ F_2 + 3F_1 & (36 \quad 52) \end{array}$$

Queda: $\begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 36 & 52 \end{bmatrix}$

1.2.8. Matriz escalonada y matriz escalonada reducida

1.2.8.1 Matriz escalonada

Una matriz se dice que es escalonada si verifica las condiciones siguientes:

a) El primer elemento no nulo (por la izquierda) de cada fila es un uno, que se llama uno principal.
b) Cada uno principal está a la derecha de los unos principales de las filas anteriores (forma escalonada).
c) Las filas nulas, si existen, están en la parte inferior de la matriz.

A partir de una matriz cualquiera y efectuando operaciones elementales, se pueden obtener matrices escalonadas.

Ejemplo 30:

La matriz $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ es escalonada y se ha obtenido haciendo

operaciones elementales en la matriz $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

En general, sea A una matriz cualquiera de tamaño mxn.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & . & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & . & . & . & a_{3(n-1)} & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & . & . & . & a_{4(n-1)} & a_{4n} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{(m-1)1} & a_{(m-1)2} & a_{(m-1)3} & . & . & . & a_{(m-1)(n-1)} & a_{(m-1)n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{m4} & . & . & a_{m(n-1)} & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Si se efectúan operaciones elementales en la matriz A de m filas, hasta obtener una matriz del mismo tamaño donde las filas superiores (las primeras r filas) sean vectores no nulos y las filas inferiores (las últimas m-r filas) sean vectores nulos, entonces, se define una matriz escalonada donde el primer elemento distinto de cero en cada vector no nulo sea la unidad.

Entonces, la forma escalonada de A es la matriz B definida por la siguiente estructura:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} & . & b_{1(n-1)} & b_{1n} \\ 0 & 1 & b_{23} & b_{24} & b_{25} & . & b_{2(n-1)} & b_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & b_{34} & b_{35} & . & b_{3(n-1)} & b_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_{45} & . & b_{4(n-1)} & b_{4n} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se puede apreciar que los vectores fila no nulos se encuentran en la parte superior de la estructura, mientras que los vectores fila nulos se encuentran siempre en la parte inferior.

Ejemplo 31:

A continuación se presentan más matrices escalonadas

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Una matriz escalonada con un vector fila no nulo y un vector fila nulo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Una matriz escalonada con dos vectores fila no nulos y un vector fila nulo

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Una matriz escalonada con un vector fila no nulo y dos vectores fila nulos

$$\begin{bmatrix} 1 & 35 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Una matriz escalonada con un vector fila no nulo y dos vectores fila nulos

$$\begin{bmatrix} 1 & 8 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Una matriz escalonada con dos vectores fila no nulos y un vector fila nulo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Una matriz escalonada con dos vectores fila no nulos y un vector fila nulo

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 8 & 6 \\ 0 & 1 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Una matriz escalonada con dos vectores fila no nulos y un vector fila nulo

Ejemplo 32:

Lleve la siguiente matriz a la forma de matriz escalonada

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Se tienen que efectuar operaciones elementales de manera que el primer elemento no nulo (por la izquierda) de cada fila es un uno. Para tal fin, se pueden seguir los procedimientos de operaciones elementales en filas de la sección 1.2.7.2

Solución:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

F3 - F1:
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

F3 + F2:
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

(-1/2)F3:
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

1.2.8.2 Matriz escalonada reducida

Una matriz se dice que es escalonada reducida si verifica las condiciones siguientes:

a) El primer elemento no nulo (por la izquierda) de cada fila es un uno, que se llama uno principal.
b) Cada uno principal está a la derecha de los unos principales de las filas anteriores (forma escalonada).

c) Las filas nulas, si existen, están en la parte inferior de la matriz.
d) Los elementos situados por encima de los unos principales son ceros.

Ejemplo 33:

A continuación se presentan matrices escalonadas reducidas

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 8 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 34:

Lleve la siguiente matriz a la forma de matriz escalonada reducida

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

La matriz escalonada de esta matriz se calculó en el ejemplo 31

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Para calcular la matriz escalonada reducida, se tienen que efectuar operaciones elementales en la matriz escalonada.

F2 – F3: $$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

F1 – F2: $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

F1 – 2F3: $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

1.2.9. Rango de una matriz

Si se tiene que r es el número de vectores fila no nulos de la forma escalonada de A, entonces, el rango de la matriz A es el escalar r. El rango de la matriz A se denota por ρ (A).

$$\rho(A) = r$$

Ejemplo 35:

Sea la matriz: $\begin{bmatrix} 1 & 7 & 8 & 6 \\ 0 & 1 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Esta matriz tiene tres vectores fila no nulos, entonces, su rango es 3.

Ejemplo 36:

Obtenga el rango de la siguiente matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución:

Para obtener el rango de una matriz, se tiene que llevar a su forma escalonada y luego se efectúa el conteo de los vectores fila no nulos.

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ su forma escalonada es $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ y esta

forma tiene 3 vectores fila no nulos. Luego, su rango es ρ (A) = 3

1.2.10. Inversa de una matriz

Sean las matrices $A = (a_{ij})$ y $B=(b_{ij})$, del mismo orden nxn. Tienen que ser matrices cuadradas.

La matriz B se define como la inversa de A si se cumple que $B.A = A.B = I$

La inversa de A se denota por A^{-1}. Luego, la matriz B es A^{-1}.

Ejemplo 37:

Sean las matrices A y B de 2x2. Verifique si B es la inversa de A.

$$A= \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$B= \begin{pmatrix} -\frac{8}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{7}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Efectuando el producto A.B, se tiene:

$$A.B \quad = \quad \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{8}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{7}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$$A.B = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix}4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{8}{3}\\ \frac{7}{3}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{5}{3}\\ -\frac{4}{3}\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}7 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{8}{3}\\ \frac{7}{3}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}7 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{5}{3}\\ -\frac{4}{3}\end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A.B = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$A.B = I$$

Se observa que al multiplicar las matrices A y B resulta la matriz identidad I.

Entonces, B es la matriz inversa de A.

Luego, $B = A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{7}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$

Cabe indicar que la inversa de una matriz se puede hallar mediante los métodos de Gauss-Jordan o el de la Adjunta.

El método de Gauss-Jordan trabaja con las operaciones elementales en filas en una matriz aumentada.

El método de la Adjunta trabaja con la transpuesta de una matriz de cofactores.

1.2.10.1. Cálculo de la inversa de una matriz por el método de reducción a la forma escalonada

Se siguen los siguientes pasos:

a) Construya la matriz aumentada $(A \mid I)$. La matriz A está a la izquierda de la partición y la matriz identidad I está a la derecha.
b) Efectúe operaciones elementales en fila para reducir $(A \mid I)$ a $(I \mid D)$.
c) Entonces, la inversa de A es $A^{-1}=D$.

Sea A una matriz de nxn

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

a) Construyendo la matriz aumentada (A | I):

$$\left.\begin{array}{ccccc|ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array}\right.$$

b) Reduciendo (A | I) a (I | D) mediante las operaciones elementales en fila, queda:

$$\left.\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & d_{11} & d_{12} & d_{13} & \ldots & d_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & d_{21} & d_{22} & d_{23} & \ldots & d_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & d_{31} & d_{32} & d_{33} & \ldots & d_{3n} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & d_{n1} & d_{n2} & d_{n3} & \ldots & d_{nn} \end{array}\right.$$

c) Luego,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & \ldots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & \ldots & d_{2n} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & \ldots & d_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ d_{n1} & d_{n2} & d_{n3} & \ldots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 38:

Obtenga la inversa de la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución:

a) Construyendo la matriz aumentada (A | I)

$$\left.\begin{array}{cc|cc} 2 & 9 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right.$$

b) Reduciendo la matriz aumentada.

Intercambio de F_1 con F_2 $$\left.\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 9 & 1 & 0 \end{array}\right.$$

F_2 -2F_1 $$\left.\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right.$$

F_1 -4F_2 $$\left.\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -4 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right.$$

c) Entonces

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 9 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

1.2.10.2. Método de la adjunta de A: Adj(A).

a) Halle los cofactores de todos los elementos de la matriz dada.
b) Construya la matriz de cofactores de la matriz dada.
c) Obtenga la Adjunta de la matriz dada, sabiendo que es igual a la transpuesta de la matriz de cofactores.
d) Calcule el determinante de la matriz dada.
e) Calcule la inversa de la matriz dada, sabiendo que es igual al cociente de la matriz adjunta entre la determinante de la matriz dada.

Ejemplo 39:

Obtenga la inversa de la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución:

Si det(A) $\neq$ 0; entonces, A será invertible.

$$\text{Det}(A) = \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = (2)(4) - (1)(9) = 8 - 9 = -1.$$

Luego, A es invertible.

Véase la sección 1.3.2.1 de determinantes de segundo orden.

Ahora se puede empezar el método de la Adjunta.

a) Hallando los cofactores de A:

$\begin{matrix} \cancel{2} & \cancel{9} \\ \cancel{1} & 4 \end{matrix}$ Cof(2) = $(-1)^{1+1}.4 = +4$

$\begin{matrix} \cancel{2} & \cancel{9} \\ 1 & \cancel{4} \end{matrix}$ Cof(9) = $(-1)^{1+2}.1 = -1$

$\begin{matrix} \cancel{2} & 9 \\ \cancel{1} & \cancel{4} \end{matrix}$ Cof(1) = $(-1)^{2+1}.9 = -9$

$\begin{matrix} 2 & \cancel{9} \\ \cancel{1} & \cancel{4} \end{matrix}$ Cof(4) = $(-1)\,.2 = +2$

b) Construyendo la matriz de cofactores de A:

$$\text{Cof(A)} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -9 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Obteniendo la matriz adjunta de A:

$$\text{Adj(A)} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -9 & 2 \end{pmatrix}^{T}$$

$$\text{Adj(A)} = \begin{pmatrix} 4 & -9 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

d) La determinante de A es

$$\text{Det(A)} = \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = (2)(4) - (1)(9) = 8 - 9 = -1.$$

Véase la sección 1.3 sobre determinantes.

e) Dividiendo Adj(A) entre Det(A), se obtiene

$$\frac{Adj(A)}{Det(A)} = \frac{\begin{bmatrix} 4 & -9 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 9 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 9 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

1.3. Determinantes

Si se considera que una matriz tiene una correspondencia con su determinante, se puede considerar que la determinante está en función de la matriz A.

1.3.1. Definición de determinante

Sea la matriz $A = (a_{ij})$ de orden nxn. La determinante de A se denota por:

$$\det(A) \text{ ó } |A|$$

La determinante de A es un número real que se obtiene efectuando la diferencia de la sumatoria de los productos de los elementos de las diagonales descendentes menos la sumatoria de los productos de los elementos de las diagonales ascendentes.

1.3.2. Cálculo de la determinante

1.3.2.1. La determinante de una matriz de segundo orden

Sea A una matriz de segundo orden

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Los elementos de la diagonal descendente son a_{11} y a_{22}.

Los elementos de la diagonal ascendente son a_{21} y a_{12}.

La determinante de A se calcula de la siguiente manera:

$$|A| = a_{11}.a_{22} - a_{21}.a_{12}$$

Ejemplo 40:

Sea la matriz cuadrada A de segundo orden $\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

$$\text{Det}(A) = \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= (2)(4) - (1)(9)$$

$$= 8 - 9$$

$$\text{Det}(A) = -1$$

1.3.2.2. La determinante de una matriz de tercer orden

Sea A una matriz de tercer orden

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Para hallar la determinante de una matriz de tercer orden, se puede seguir el Método de Sarrus, el de las submatrices en una columna o el del pivote.

1.3.2.2.1 Cálculo de la determinante de una matriz 3x3 por el método de Sarrus

a) Replique las dos primeras columnas a la derecha de la matriz.
b) Identifique las tres diagonales principales y las tres diagonales secundarias.
c) Efectúe la sumatoria de los productos trinómicos de cada diagonal principal.
d) Efectúe la sumatoria de los productos trinómicos de cada diagonal secundaria.
e) Calcule la determinante efectuando la sustracción de las sumatorias.

Sea la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

a) El nuevo arreglo de cinco columnas adopta la siguiente forma:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

b) Ahora, se identifican las tres diagonales principales (descendentes) y las tres diagonales secundarias (ascendentes).

Las diagonales principales son:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Las diagonales secundarias son:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

c) La sumatoria de los productos trinómicos de cada diagonal principal son:

$$a_{13}.a_{21}.a_{32} + a_{12}.a_{22}.a_{32} + a_{11}.a_{22}.a_{33}$$

d) La sumatoria de los productos trinómicos de cada diagonal secundaria son:

$$a_{31}.a_{22}.a_{13} + a_{32}.a_{23}.a_{11} + a_{33}.a_{21}.a_{12}$$

e) Luego, la determinante de A se obtiene efectuando la diferencia de dichas sumatorias. Las sumatoria de las principales menos la sumatoria de las secundarias.

$|A|=(a_{13}.a_{21}.a_{32}+a_{12}.a_{22}.a_{32}+a_{11}.a_{22}.a_{33})-(a_{31}.a_{22}.a_{13}+a_{32}.a_{23}.a_{11}+a_{33}.a_{21}.a_{12})$

Ejemplo 41:

Sea la matriz cuadrada de tercer orden

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) El nuevo arreglo de cinco columnas adopta la siguiente forma:

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \end{matrix}$$

b) Ahora, se identifican las tres diagonales principales (descendentes) y las tres diagonales secundarias (ascendentes).

Las diagonales principales son:

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \end{matrix}$$

Las diagonales secundarias son:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \end{array}$$

c) La sumatoria de los productos trinómicos de cada diagonal principal son:

$$(1)(1)(3) + (1)(2)(1) + (1)(0)(0) = 3 + 2 + 0 = 5$$

d) La sumatoria de los productos trinómicos de cada diagonal secundaria son:

$$(1)(1)(1) + (0)(2)(1) + (3)(0)(1) = 1 + 0 + 0 = 1$$

e) Luego, la determinante de A se obtiene efectuando la diferencia de dichas sumatorias. Sumatoria de las principales menos sumatoria de las secundarias.

$$|A| = 5 - 1 = 4$$

1.3.2.2.2 Cálculo de la determinante de una matriz 3x3 por el método de las submatrices.

a) Seleccione una sola columna (o fila) e identifique sus elementos.
b) Deduzca las submatrices de los elementos de la columna seleccionada.
c) Halle los menores calculando las determinantes de dichas submatrices.
d) Halle los cofactores anteponiendo un signo prefijado a su respectivo menor.
e) Multiplique cada cofactor con su respectivo elemento.
f) Halle la determinante de A efectuando la sumatoria de dichas multiplicaciones.

Empezando con la matriz dada

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

a) Seleccionando los elementos de la primera columna.

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

Donde a_{11}, a_{21} y a_{31} son los elementos de la primera columna seleccionada.

b) Usando esos elementos como referencia, se deducen las submatrices.

Con el elemento a_{11}, se puede deducir la primera submatriz.

Tal como lo sugieren los subíndices de a_{11}, se procede a eliminar la primera fila y la primera columna de A.

$$\begin{array}{ccc} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{cc} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{array}$$

Con el elemento a_{21}, se puede deducir la segunda submatriz.

Tal como lo sugieren los subíndices de a_{11}, se procede a eliminar la segunda fila y la primera columna de A.

$$\begin{array}{ccc} \cancel{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ \cancel{a_{21}} & \cancel{a_{22}} & \cancel{a_{23}} \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{cc} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{array}$$

Con el elemento a_{31}, se puede deducir la tercera submatriz.

Tal como lo sugieren los subíndices de a_{31}, se procede a eliminar la tercera fila y la primera columna de A.

$$\begin{array}{ccc} \cancel{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & \cancel{a_{32}} & \cancel{a_{33}} \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{cc} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{array}$$

Las submatrices recién obtenidas se presentan a continuación:

La submatriz del elemento a_{11} es $\begin{matrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{matrix}$

La submatriz del elemento a_{21} es $\begin{matrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{matrix}$

La submatriz del elemento a_{31} es $\begin{matrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{matrix}$

c) Ahora se procede a calcular sus respectivas determinantes. Se denominan menores. Se denotan por M_{ij}.

El menor de a_{11} es $M_{11} = \det(\begin{matrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{matrix}) = a_{22}.a_{33} - a_{32}.a_{23}$

El menor de a_{21} es $M_{21} = \det(\begin{matrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{matrix}) = a_{12}.a_{33} - a_{32}.a_{13}$

El menor de a_{31} es $M_{31} = \det(\begin{matrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{matrix}) = a_{12}.a_{23} - a_{22}.a_{13}$

d) Ahora, se procede a calcular sus respectivos cofactores. Se denotan por A_{ij}.

El cofactor del elemento aij se obtiene anteponiendo un signo prefijado a su respectivo Menor M_{ij}.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

El cofactor de a_{11} es $A_{11} = (-1)^{1+1}.M_{11} = (-1)^{2}.M_{11} = (+1).M_{11}$

El cofactor de a_{21} es $A_{21} = (-1)^{2+1}.M_{21} = (-1)^{3}.M_{21} = (-1).M_{21}$

El cofactor de a_{31} es $A_{31} = (-1)^{3+1}.M_{31} = (-1)^{4}.M_{31} = (+1).M_{31}$

e) Ahora, efectuemos los productos binómicos de elementos y cofactores.

Para el elemento a_{11}, se tiene $a_{11}.A_{11} = a_{11}.(+1).M_{11} = +\ a_{11}.M_{11}$

Para el elemento a_{21}, se tiene $a_{21}.A_{21} = a_{21}.(-1).M_{21} = -\ a_{21}.M_{21}$

Para el elemento a_{31}, se tiene $a_{31}.A_{31} = a_{31}.(+1).M_{31} = +\ a_{31}.M_{31}$

f) Calculando la determinante de la matriz A. Se efectúa la sumatoria de dichos productos binómicos recién obtenidos.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = +\ a_{11}.M_{11}\ -\ a_{21}.M_{21}\ +\ a_{31}.M_{31}$$

Ejemplo 42:

Sea la matriz cuadrada de tercer orden

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Seleccionando los elementos de la primera columna.

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{matrix}$$

Donde $a_{11} = 1$, $a_{21} = 0$ y $a_{31} = 1$ son los elementos de la primera columna seleccionada.

b) Usando esos elementos como referencia, se deducen las submatrices.

Con el elemento $a_{11} = 1$ se puede deducir la primera submatriz.

Tal como lo sugieren los subíndices de $a_{11} = 1$ se procede a eliminar la primera fila y la primera columna de A.

$$\begin{array}{c|ccc} & \underline{1} & \underline{1} & \underline{1} \\ \hline & 0 & 1 & 2 \\ & 1 & 0 & 3 \end{array} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{matrix}$$

Con el elemento $a_{21}=0$ se puede deducir la segunda submatriz.

Tal como lo sugieren los subíndices de , se procede a eliminar la segunda fila y la primera columna de A.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{matrix}$$

Con el elemento $a_{31}=1$ se puede deducir la tercera submatriz.

Tal como lo sugieren los subíndices de a_{31}, se procede a eliminar la tercera fila y la primera columna de A.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix}$$

Las submatrices recién obtenidas se presentan a continuación:

La submatriz del elemento $a_{11}=1$ es $\begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{matrix}$

La submatriz del elemento $a_{21}=0$ es $\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{matrix}$

La submatriz del elemento $a_{31}=1$ es $\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix}$

c) Ahora se procede a calcular sus respectivas determinantes. Se denominan menores. Se denotan por M_{ij}.

El menor de $a_{11} = 1$ es $M_{11} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = (1)(3) - (0)(2) = 3$

El menor de $a_{21} = 0$ es $M_{21} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = (1)(3) - (0)(1) = 3$

El menor de $a_{31} = 1$ es $M_{31} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (1)(2) - (1)(1) = 1$

d) Ahora, se procede a calcular sus respectivos cofactores. Se denotan por A_{ij}.

El cofactor del elemento aij se obtiene anteponiendo un signo prefijado a su respectivo menor M_{ij}.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \,.\, M_{ij}$$

El cofactor de a_{11} es $A_{11} = (-1)^{1+1}.3 = (-1)^2.3 = (+1).3 = +3$

El cofactor de a_{21} es $A_{21} = (-1)^{2+1}.3 = (-1)^3.3 = (-1).3 = -3$

El cofactor de a_{31} es $A_{31} = (-1)^{3+1}.1 = (-1)^4.1 = (+1).1 = +1$

e) Ahora, efectuemos los productos binómicos de elementos y cofactores.

Para el elemento $a_{11}=1$ se tiene $a_{11}.A_{11} = (1).(+3) = 3$

Para el elemento $a_{21} = 0$ se tiene $a_{21}.A_{21} = (0)(-3) = 0$
Para el elemento $a_{31} = 1$ se tiene $a_{31}.A_{31} = (1).(+1) = 1$

f) Se efectúa la sumatoria de dichos productos binómicos recién obtenidos.

$$3 + 0 + 1 = 4$$

Luego:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 4$$

1.3.2.2.3 Cálculo de la determinante de una matriz 3x3 por el método del pivote

a) Seleccione una sola columna.
b) Efectúe operaciones elementales hasta que los elementos de alguna fila sean ceros excepto el que pertenezca a la columna seleccionada. Este elemento se denomina pivote.
c) Calcule el menor del pivote.
d) Calcule el cofactor del pivote.
e) Calcule el determinante de A multiplicando el pivote por su cofactor.

Empezando con la matriz dada

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

a) Seleccionando una columna, por ejemplo la primera.

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

Donde a_{11}, a_{21} y a_{31} son los elementos de la columna seleccionada.

b) Efectúe transformaciones elementales hasta que los elementos de alguna fila sean ceros excepto el que pertenezca a la columna seleccionada. Quedando el arreglo equivalente que se presenta a continuación.

$$\begin{matrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & d_{22} & d_{23} \\ a_{31} & d_{32} & d_{33} \end{matrix}$$

La columna seleccionada conserva los valores originales a_{11}, a_{21} y a_{31}.

Después de las transformaciones elementales, la fila 1 tiene ceros excepto el elemento a_{11} de la columna seleccionada. El pivote es $_{a11}$. Los nuevos elementos d_{22}, d_{23}, d_{32} y d_{33} son los valores de la submatriz de Pivote a_{11}.

c) Calculando el menor del pivote a_{11}.

$$\begin{matrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & d_{22} & d_{23} \\ a_{31} & d_{32} & d_{33} \end{matrix}$$

$$M_{11} = \det\begin{pmatrix} d_2 & d_3 \\ d_3 & d_3 \end{pmatrix} = d_{22}.d_{33} - d_{32}.d_{23}$$

d) Calculando el cofactor del pivote $_{a11}$.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}.M_{11} = (-1)^2.M_{11} = (+1).M_{11} = M_{11}$$

e) Calculando la determinante de A

$$|A| = a_{11}.A_{11} = a_{11}.M_{11} = a_{11}.(d_{22}.d_{33} - d_{32}.d_{23})$$

Ejemplo 43:

Sea la matriz cuadrada de tercer orden

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Seleccionando una columna, por ejemplo la primera.

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{matrix}$$

Donde $a_{11}=1$, $a_{21}=0$ y $a_{31}=1$ son los elementos de la columna seleccionada.

b) Efectúe transformaciones elementales hasta que los elementos de alguna fila sean ceros excepto el que pertenezca a la columna seleccionada.

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{array}$$

$$C_3 - C_2: \quad \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{array}$$

$$C_2 - C_1: \quad \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{array}$$

La columna seleccionada conserva los valores originales $a_{11}=1$, $a_{21}=0$ y $a_{31}=1$.

Después de las transformaciones elementales, la fila 1 tiene ceros excepto el elemento $a_{11}=1$ de la columna seleccionada. Entonces, el pivote es $a_{11}=1$.

Los nuevos elementos d_{22}, d_{23}, d_{32} y d_{33} son los valores de la submatriz del Pivote a_{11}. Tal como se ven a continuación:

Pivote

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{array}$$

Submatriz

c) Calculando el menor del pivote a_{11}

$$\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{array}$$

$$M_{11} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = (1)(3) - (-1)(1) = 3 + 1 = 4$$

d) Calculando el cofactor del Pivote a_{11}

$$A_{11} = (-1)^{1+1}.\ M_{11} = (-1)^{1+1}.4 = (-1)^2.4 = \quad (+1).4 = 4$$

e) Calculando la determinante de A

$$|A| = a_{11}.A_{11} = (1)(4) = 4$$

1.3.2.3 Cálculo de la determinante de una matriz de orden superior al tercero

Sea A una matriz de orden superior al tercero:

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Para hallar la determinante de A, se puede seguir el método de las submatrices en una columna o el del pivote. Es similar al numeral 1.3.2.2, pero con la diferencia que ahora la matriz es de orden mayor al tercero. Para estos tamaños, es preferible utilizar el método del Pivote.

1.3.2.3.1 Cálculo de la determinante de una matriz nxn por el método de las submatrices.

a) Seleccione una sola columna (o fila) e identifique sus elementos.

b) Deduzca las submatrices de los elementos de la columna seleccionada.

c) Halle los menores calculando las determinantes de dichas submatrices.

d) Halle los cofactores anteponiendo un signo prefijado a su respectivo menor.

e) Multiplique cada cofactor con su respectivo elemento.

f) Halle la determinante de A efectuando la sumatoria de dichas multiplicaciones.

Ejemplo 44:

Sea la matriz cuadrada de orden superior

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Seleccionando una columna, por ejemplo, la primera.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Donde $a_{11}=1$, $a_{21}=0$, $a_{31}=1$ y $a_{41}=1$ son los elementos de la columna seleccionada.

b) Deduzca las submatrices de los elementos de la columna seleccionada.

$$\left|\begin{matrix} \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{0} \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}\right.$$

$$\left|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{0} \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}\right.$$

$$\left|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{3} & \cancel{0} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}\right.$$

$$\left|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} \end{matrix}\right.$$

c) Halle los menores calculando las determinantes de dichas submatrices.

$$M_{11} = \text{Det}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

$$M_{21} = \text{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

$$M_{31} = \text{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$M_{41} = \text{Det}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

d) Halle los cofactores anteponiendo un signo prefijado a su respectivo menor

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

El cofactor de a_{11} es $A_{11} = (-1)^{1+1}.3 = (-1)^{2}.3 = (+1).3 = +3$

El cofactor de a_{21} es $A_{21} = (-1)^{2+1}.3 = (-1)^{3}.3 = (-1).3 = -3$

El cofactor de a_{31} es $A_{31} = (-1)^{3+1}.1 = (-1)^{4}.1 = (+1).1 = +1$

El cofactor de a_{41} es $A_{41} = (-1)^{4+1}.0 = (-1)^{5}.0 = (-1).0 = 0$

e) Multiplique cada cofactor con su respectivo elemento.

Para el elemento $a_{11} = 1$ se tiene $a_{11}.A_{11} = (1).(+3) = 3$

Para el elemento $a_{21} = 0$ se tiene $a_{21}.A_{21} = (0)(-3) = 0$

Para el elemento $a_{31} = 1$ se tiene $a_{31}.A_{31} = (1).(+1) = 1$

Para el elemento $a_{41} = 1$ se tiene $a_{41}.A_{41} = (1).(0) = 0$

f) Halle la determinante de A efectuando la sumatoria de dichas multiplicaciones.

$$3 + 0 + 1 + 0 = 4$$

Entonces, la determinante de A es:

$$\text{Det}(A) = 4$$

1.3.2.3.2. Cálculo de la determinante de una matriz nxn por el método del pivote

a) Seleccione una sola columna.
b) Efectúe operaciones elementales hasta que los elementos de alguna fila sean ceros excepto el que pertenezca a la columna seleccionada. Este elemento se denomina pivote.
c) Calcule el menor del pivote.
d) Calcule el cofactor del pivote.
e) Calcule el determinante de A multiplicando el pivote por su cofactor.

Ejemplo 45:

Sea la matriz cuadrada de orden superior

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Seleccionando una columna, por ejemplo la primera.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Donde $a_{11}=1$, $a_{21}=0$, $a_{31}=1$ y $a_{41}=1$ son los elementos de la columna seleccionada.

b) Efectúe transformaciones elementales hasta que los elementos de alguna fila sean ceros excepto el que pertenezca a la columna seleccionada.

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

$$C_3 - C_2: \quad \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$C_2 - C_1: \quad \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

La columna seleccionada conserva los valores originales $a_{11}=1$, $a_{21}=0$, $a_{31}=1$ y $a_{41}=1$.

Después de las transformaciones elementales, la fila 1 tiene ceros excepto el elemento $a_{11}=1$ de la columna seleccionada.

El Pivote es $a_{11}=1$.

$$\begin{array}{|cccc} \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Los nuevos elementos d_{22}, d_{23}, d_{24}, d_{32}, d_{33}, d_{34}, d_{42}, d_{43} y d_{44} son los valores de la submatriz del pivote a_{11}.

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

c) Calculando el menor del pivote a_{11}.

$$M_{11} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \cancel{1} & 1 & 0 \\ \cancel{-1} & 3 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{matrix} \quad = (1)(0)\text{-}(3)(0)=0$$

$$\begin{matrix} 1 & \cancel{1} & 0 \\ -1 & \cancel{3} & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{matrix} \quad = (1)(0)\text{-}(\text{-}1)(0)=0$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & \cancel{0} \\ -1 & 3 & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{matrix} \quad = (1)(3)\text{-}(\text{-}1)(1)=4$$

$$M_{11} = \text{Det} \left(\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right) = (0)(0) + (0)(0) + (1)(4) = 4$$

d) Calculando el cofactor del Pivote a_{11}.

$$A_{11} = (-1)^1+1.\ M_{11} = (-1)^2.4 = \quad (+1).4 = 4$$

e) Calculando la determinante de A.

$$|A| = a_{11}.A_{11} = (1)(4) = 4$$

1.3.2.4. Cálculo de la determinante de una matriz triangular

Sean una matriz triangular superior y una matriz triangular inferior.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ó

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

La determinante de cualquiera de ellas es el producto de los elementos de su diagonal principal.

$$\text{Det(A)}= \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Ejemplo 46:

Sea la matriz triangular superior A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se observa que los elementos de su diagonal son 1, 1, 3 y 1. Entonces, la determinante de A es:

$$\text{Det(A)} = (1)(1)(3)(1)$$

$$\text{Det(A)} = 3$$

1.3.3. Propiedades de matrices y determinantes

1) $A+B=B+A$

2) $(A+B)+C=A+(B+C)$

3) $A+O=O+A=A$

4) $A+(-A)=(-A)+A=O$

5) $r(A+B)=rA+rB$

6) $(r+s)A=rA+sA$

7) $(rs)A=r(sA)$

8) $A(BC)=(AB)C$

9) $AB \neq BA$

10) $B.A = A.B$ si y sólo si $B = A^{-1}$

11) $AB=AC$ si y sólo si $B=C$

12) $IA=A$ y $BI=B$

13) $A(B+C)=AB+AC$

14) $(A+B)C=AC+BC$

15) $(A^T)^T=A$

16) $(A+B)^T=A^T+B^T$

17) $(AB)^T=B^TA^T$

18) $(rA)^T = rA^T$

19) $(A^n)^T = (A^T)^n$

20) $(I^n)^T = I^n$

21) $Det(I) = 1$

22) $Det(rA) = r^n Det(A)$

23) $Det(A^T) = Det(A)$

24) $(A^{-1})^{-1} = A$

25) $(rA)^{-1} = \frac{1}{r} A^{-1}$

26) $Det(A^{-1}) = \frac{1}{Det(A)}$

27) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

28) $I^{-1} = I$

29) $Adj(A^{-1}) = [Adj\ (A)]^{-1}$

30) $Adj(rA^{-1}) = r^{n-1} \cdot Adj\ (A)$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Escriba una matriz del orden que se indica a continuación:

a) 1x1 $\begin{pmatrix} 9 \end{pmatrix}$

b) 1x2 $\begin{pmatrix} 3 & 6 \end{pmatrix}$

c) 2x1 $\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

d) 2x2 $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$

e) 2x3 $\begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 8 & 9 & 0 \end{bmatrix}$

f) Mxn

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

2. Verifique si las matrices A y F son iguales:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ f_{31} \end{pmatrix}$$

Verificando que:

i) A y F tengan el mismo orden.
El orden de A es 2x5 y el orden de F es 3x1.
Se observa que A y F tienen órdenes distintos.

ii) Los elementos de la primera sean iguales a los elementos de la segunda, respectivamente.

Esta condición ya no tiene que evaluarse porque no se está cumpliendo la primera condición.

Por lo tanto, se concluye que A y F no son iguales.

3. ¿Qué se debe cumplir para que las matrices D y Q sean iguales?

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \end{pmatrix}$$

Verificando que:

i) D y Q tengan el mismo orden

El orden de D es 1x2 y el orden de Q es 1x2. Se observa que D y Q tienen el mismo orden.

ii) Los elementos de la primera sean iguales a los elementos de la segunda, respectivamente.

Para que D sea igual a Q se requiere que $d_{11} = q_{11}$ y $d_{12} = q_{12}$

Por lo tanto, se debe cumplir que sean del mismo orden 1x2 y que

$$d_{11} = q_{11} \quad y \quad d_{12} = q_{12}$$

4. Indique el tipo de matriz de las siguientes:

$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \end{pmatrix}$ __________Vector Fila __________

$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$ __________Vector Columna __________

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ __________ Matriz Nula __________

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

____ Matriz triangular superior ____

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 8 & 6 \\ 0 & 1 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

_________ Matriz escalonada _______

5. Dadas las matrices A y B:

$$A= \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad B= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Halle

a) A+B
b) A-B
c) 5A
d) A.B
e) B^3
f) B^T

a) $$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 3+1 & 3+0 \\ 3+2 & 3+4 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

b) $$A - B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) $$5A = 5 \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$5A = \begin{pmatrix} 15 & 15 \\ 15 & 15 \end{pmatrix}$$

d) $$A \, . \, B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A \, . \, B = \begin{pmatrix} 3(1)+3(2) & 3(0)+3(4) \\ 3(1)+3(2) & 3(0)+3(4) \end{pmatrix}$$

$$A \, . \, B = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$$

e) $$B^3 = B.B.B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 1(1)+0(2) & 1(0)+0(4) \\ 2(1)+4(2) & 2(0)+4(4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 1(1)+0(2) & 1(0)+0(4) \\ 10(1)+16(2) & 10(0)+16(4) \end{pmatrix}$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 42 & 64 \end{pmatrix}$$

f) $\quad B^T \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^T$

$\quad B^T \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

6. Calcule 2(3A-B) – 3(B-2C) + 4[2(A+B-C) – (4A+3C)]

Si $\quad A= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad B= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad C= \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Solución:

Utilizando las propiedades de matrices

Sea D igual a 2(3A-B) – 3(B-2C) + 4[2(A+B-C) – (4A+3C)]

D = 6A-2B – 3B+6C + 4[2A+2B-2C – 4A-3C]
D = 6A-2B – 3B+6C + 4[-2A+2B-5C]
D = 6A-2B – 3B+6C -8A+8B-20C
D = -2A+3B -14C

$$D = \ -2\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} - 14\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -29 & 41 & -8 \\ 0 & -22 & -3 \end{bmatrix}$$

7. Calcule AB y BA

Si $\quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad$ y $\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Solución:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} (2 \quad -1 \quad 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} & (2 \quad -1 \quad 1)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \\ (1 \quad 0 \quad 2)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} & (1 \quad 0 \quad 2)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}$$

El otro producto,

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} (1 \quad 2)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} & (1 \quad 2)\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} & (1 \quad 2)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ (0 \quad -1)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} & (0 \quad -1)\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} & (0 \quad -1)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ (3 \quad 4)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} & (3 \quad 4)\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} & (3 \quad 4)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & -2 \\ 10 & -3 & 11 \end{bmatrix}$$

8. Halle la matriz X tal que

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} + X = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución:

Utilizando las propiedades de la suma de matrices

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

9. Halle X e Y sabiendo que

$$X + Y = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 7 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$2X - 3Y = \begin{bmatrix} -4 & -3 & 2 \\ -6 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

Solución:

En este ejercicio se maneja un sistema de dos ecuaciones matriciales en el que cada variable X e Y es una matriz.

$$X + Y = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 7 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{-----} (1)$$

$$2X - 3Y = \begin{bmatrix} -4 & -3 & 2 \\ -6 & 2 & -5 \end{bmatrix} \text{-----} (2)$$

(2) – 2(1):

$$-5Y = \begin{bmatrix} -10 & -5 & 10 \\ -20 & 0 & -15 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{- - - - - (3)}$$

(3) en (1):

$$X + \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 7 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 7 & 1 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

10. Lleve las siguientes matrices a la forma de matriz escalonada y luego a la forma de matriz reducida.

a) $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -4 \\ -1 & -2 & -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

b) $$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

Solución:

a) $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -4 \\ -1 & -2 & -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Para obtener la forma escalonada, se efectúan operaciones elementales en la matriz.

F2 + 2F4: $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -4 \\ -1 & -2 & -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

F4 + F1: $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(-1)F2: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

F4 + F2: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

F3 – F2: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(-1)F3: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Respuesta.

Esta es la matriz escalonada porque satisface las condiciones establecidas en la sección 1.2.8.1.

Ahora, para calcular la matriz escalonada reducida, se tienen que efectuar operaciones elementales en la matriz escalonada.

F2 – 2F3: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

F1 – F2: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -4 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

F1 + F3: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Respuesta.

Esta es la matriz escalonada reducida porque satisface las condiciones establecidas en la sección 1.2.8.2.

b) $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & -3 & 6 \end{bmatrix}$

Para obtener la forma escalonada, se efectúan operaciones elementales en la matriz.

F1 con F4: $$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 6 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

F2 + F1: $$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 6 \\ 0 & 6 & -6 & 10 \\ -2 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

F3 + 2F1: $$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 6 \\ 0 & 6 & -6 & 10 \\ 0 & 9 & -3 & 17 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

F4 – 4F1: $$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 6 \\ 0 & 6 & -6 & 10 \\ 0 & 9 & -2 & 17 \\ 0 & -15 & 15 & -22 \end{bmatrix}$$

F4 + (15/6)F2: $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 6 \\ 0 & 6 & -6 & 10 \\ 0 & 9 & -2 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

F3 – (9/6)F2: $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 6 \\ 0 & 6 & -6 & 10 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(1/6)F2: $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 5/3 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(1/7)F3: $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 5/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ Respuesta.

Esta es la matriz escalonada porque satisface las condiciones establecidas en la sección 1.2.8.1.

Ahora, para calcular la matriz escalonada reducida, se tienen que efectuar operaciones elementales en la matriz escalonada.

F2 – F3: $$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 29/21 \\ 0 & 0 & 1 & 2/7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

F1 + 3F3: $$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 48/7 \\ 0 & 1 & 0 & 29/21 \\ 0 & 0 & 1 & 2/7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

F1 – 4F2: $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 20/21 \\ 0 & 1 & 0 & 29/21 \\ 0 & 0 & 1 & 2/7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$ Respuesta.

Esta es la matriz escalonada reducida porque satisface las condiciones establecidas en la sección 1.2.8.2.

11. Obtenga el rango de las matrices A y B

a) $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -4 \\ -1 & -2 & -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

b) $\quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & -3 & 6 \end{bmatrix}$

Para obtener el rango de una matriz, se tiene que llevar a su forma escalonada y luego se efectúa el conteo de los vectores fila no nulos.

Solución:

a) $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -4 \\ -1 & -2 & -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ su forma escalonada es $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

y tiene 3 vectores fila no nulos. Luego, su rango es ρ (B) = 3

b) $C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & -3 & 6 \end{bmatrix}$ su forma escalonada es $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 5\,3 \\ 0 & 0 & 1 & 2\,7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

y tiene 4 vectores fila no nulos. Luego, su rango es ρ (B) = 4

12. Dadas las matrices A y B

A= $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad$ B= $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad$ Verifique si son invertibles

Solución:

$$\text{Det}(A) = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = (3)(3) - (3)(3) = 9\text{-}9 = 0$$

Det(A)=0, entonces, la matriz A no es invertible.

$$\text{Det}(B) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (1)(4) - (2)(0) = 4\text{-}0 = 4$$

Det(B) $\neq$ 0, entonces, la matriz B es invertible.

13. Obtenga la inversa de la matriz A por el método de la adjunta

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución:

Si det(A) $\neq$ 0, entonces, A será inversible.

$$\text{Det}(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (1)(4) - (2)(0) = 4 - 0 = 4.$$

Luego, A es invertible.

Ahora se puede iniciar el método de la Adjunta.

a) Hallando los cofactores de A:

$$\begin{matrix} \cancel{1} & \cancel{0} \\ \cancel{2} & 4 \end{matrix} \quad \text{Cof}(1) = (-1)^{1+1}.4 = +4$$

$$\begin{matrix} \cancel{1} & \cancel{0} \\ 2 & \cancel{4} \end{matrix} \quad \text{Cof}(0) = (-1)^{1+2}.2 = -2$$

$$\begin{matrix} \cancel{1} & 0 \\ \cancel{2} & \cancel{4} \end{matrix} \quad \text{Cof}(2) = (-1)^{2+1}.0 = 0$$

$$\begin{matrix} 1 & \cancel{0} \\ \cancel{2} & \cancel{4} \end{matrix} \quad \text{Cof}(4) = (-1)^{2+2}.1 = +1$$

b) Construyendo la matriz de cofactores de A:

$$\text{Cof(A)} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Obteniendo la matriz adjunta de A:

$$\text{Adj(A)} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{T}$$

$$\text{Adj(A)} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

d) La determinante de A es

$$\mathrm{Det(A)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (1)(4) - (2)(0) = 4 - 0 = 4.$$

e) Dividiendo Adj(A) entre Det(A), se obtiene:

$$\frac{Adj(A)}{Det(A)} = \frac{\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}}{4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0.5 & 0.25 \end{pmatrix}$$

Luego

$$\mathrm{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0.5 & 0.25 \end{pmatrix}$$

14. Obtenga la inversa de la matriz A mediante la reducción a la forma escalonada de la matriz aumentada (A | I).

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución:

a) Construyendo la matriz aumentada (A | I)

$$(A \mid I) = \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

b) Reduciendo la matriz aumentada

$$0.25F_2 \qquad \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 & 0.25 \end{array}\right]$$

$$F_2 - 0.5F_1 \qquad \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -0.5 & 0.25 \end{array}\right]$$

$$(I \mid A^{-1}) = \qquad \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -0.5 & 0.25 \end{array}\right]$$

c) Entonces

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -0.5 & 0.25 \end{bmatrix}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 8 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

Halle una matriz X que satisfaga la ecuación $3B + \frac{1}{4}X = A$.

Respuesta. $X = \begin{bmatrix} -64 & 44 & -32 & 12 \\ -24 & 8 & -40 & -76 \end{bmatrix}$

2. Halle los valores w, x, y, z que satisfagan la igualdad.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ w & x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 8 & 5 \\ 5 & 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Respuesta. x=0, y=0, z=1, w=4

3. Sean las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ 3 & 7 & -3 \end{bmatrix}$$

Si $(A^T + B^T) = 2(X\text{-}A^T) + 3B$, halle la suma de las componentes de la tercera fila de X.

Respuesta. La suma es -9

4. Lleve las siguientes matrices a la forma escalonada mediante operaciones elementales:

a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ Respuesta. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ Respuesta. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \end{bmatrix}$ Respuesta. $\begin{bmatrix} 1 & -1\;2 & 2 & 1\;2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1\;5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

5. Lleve las siguientes matrices a la forma escalonada reducida mediante operaciones elementales:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -4 \\ -1 & -2 & -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ Respuesta. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & -5 \end{bmatrix}$ Respuesta. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2\;3 & -1\;3 & 1\;3 \\ 0 & 1 & -1\;3 & 5\;3 & -8\;3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 120 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 110 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 110 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Respuesta.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 110 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6. Halle las determinantes de las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

Respuesta. $\det(A) = 64$ $\qquad$ $\det(B) = -108$

7. Calcule el valor de x si $\det(A-2B) = 3$ e I es la matriz identidad.

$$A = \begin{bmatrix} x-2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 3x+4 & -1 & -2 & 1 \\ x & -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = {}^{1}\!/_{2}\, I$$

Respuesta. $x = {}^{11}\!/_{24}$

8. Halle la inversa de las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ 3 & 7 & -3 \end{bmatrix}$$

Respuesta.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} {}^{25}/_{54} & {}^{7}/_{54} & -{}^{1}/_{54} \\ {}^{-9}/_{54} & -{}^{9}/_{54} & {}^{9}/_{54} \\ {}^{4}/_{54} & -{}^{14}/_{54} & {}^{2}/_{54} \end{bmatrix}$$

9. Verifique si la matriz A es invertible mediante el cálculo de la determinante.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ -1 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

Respuesta. La matriz A no es invertible

10. Verifique si la matriz A es invertible mediante la reducción a la forma escalonada

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ -1 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

Respuesta. La matriz A no es invertible

11. Una compañía fabrica llaves inglesas para tubos de 8, 14 y 18 pulgadas, y cada una de ellas de tres modelos: E es económico, M es medio y L es lujo. Cada mes produce 200 modelos E, 150 M y 100 L de 8 pulgadas; 120 modelos E, 80 M y 50 L de 14 pulgadas; y 180 modelos E, 200 M y 120 L de 18 pulgadas. Represente esta información en una matriz y calcule la producción de un año.

Respuesta.

	E	M	L
Llaves de 8"	2400	1800	1200
Llaves de 14"	1440	960	600
Llaves de 18"	2160	2400	1440

¿Sabías que el matemático y astrónomo indio Brahmagupta inventó el cero y que gracias a los árabes lo introdujeron en Europa?

II Unidad Didáctica

Sistema de ecuaciones lineales

Introducción

Los procesos y fenómenos que se dan en lo social, comercio, transporte, construcción, agricultura, industria en general y en los ámbitos de la naturaleza, requieren ser conocidos por el hombre mediante modelos matemáticos que faciliten el análisis de variables en escenarios diversos.

Un sistema de ecuaciones lineales que integre dichas variables permite representar y analizar, por ejemplo, los puntos de intersección de calles circulando tráfico por ellas; los puntos de distribución de un producto conectados por medios de transporte que transportan entre sí esa mercancía; una red de irrigación formada por canales con sus puntos de conexión por el que se transporta agua para regar una zona de cultivo; o un sistema elástico (varilla metálica, membrana, lámina, etc.) sobre dos ejes.

Por lo tanto, será de utilidad el estudio de los tipos de sistemas de ecuaciones lineales y las formas que éstos pueden adoptar a fin de poder resolverlos con facilidad.

2.1. La ecuación lineal

2.1.1. Forma tradicional de una ecuación lineal

Se presenta a una ecuación lineal como la que sigue a continuación:

$$1x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4$$

Donde las incógnitas son x_1, x_2 y x_3; el término independiente es 4; y los coeficientes de la ecuación lineal son 1, 2 y 3.

Dicha ecuación se resuelve hallando los valores de las incógnitas x_1, x_2 y x_3.

2.1.2. Forma matricial de una ecuación lineal

Si se considera una matriz fila A, una matriz columna X y el número de columnas de A es igual al número de filas de X, entonces, una ecuación lineal está definida cuando el producto escalar de dichas matrices es igual a una constante.

De acuerdo a la sección 1.1.11 sobre tipos de matrices, una matriz fila se denomina vector fila, mientras que una matriz columna como vector columna.

Sean las matrices A, X y el escalar b.

Donde:

A es de orden 1xn,

$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \end{bmatrix}$, con ai $\in R^1$, i=1,2,3,…,n.

X es de orden nx1,

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$,xj representa a las variables de un proceso, j=1,2,3,…,n.

b un escalar, b $\in R^1$.

Ahora, considérese el producto de la matriz fila A por la matriz columna X, que de acuerdo a la sección 1.2.4, el producto A.X es un escalar b tal como se puede ver a continuación:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = b$$

Esta es la forma matricial de una ecuación lineal.

Efectuando el producto, se obtiene la forma tradicional de la ecuación lineal:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$$

Donde:

ai representa a los coeficientes de la ecuación
xj representa a las incógnitas de la ecuación
b representa al término independiente de la ecuación

La ecuación lineal también se puede escribir en forma general de la siguiente manera:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = \text{b}, \qquad \text{j}=1, 2, 3, \ldots, \text{n}$$

2.1.3. Vector solución de una ecuación lineal

Sea la matriz o vector columna U cuyos elementos ui son escalares

$$\text{U} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

Considerando la ecuación lineal $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots +$ anxn = b y el vector solución U definido cuando los u_i satisfacen a dicha ecuación. Es decir, cuando $x_1 = u_1$, $x_2 = a_2$, $x_3 = u_3$,…, $x_n = a_n$.

Ejemplo 1:

Sea la ecuación lineal $1x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4$ y un vector solución U = (-1, 1, 1), se verifica que el vector solución U satisface la ecuación lineal, tal como se verifica a continuación:

La ecuación lineal $1x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4$ se puede reescribir como el siguiente producto:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 4, \text{ siendo el vector columna } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

El vector solución U = (-1, 1, 1) se puede reescribir:

$$U = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Haciendo X = U en la ecuación lineal, se tiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 4$$

Efectuando el producto:

$$\begin{aligned} (1)(-1) + (2)(1) + (3)(1) &= 4 \\ -1 + 2 + 3 &= 4 \\ 4 &= 4 \end{aligned}$$

Se observa que al reemplazar el vector solución U en la ecuación lineal se llega a la identidad 4=4. Luego, se reconoce a U=(-1,1,1) como el vector solución de la ecuación lineal $1x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4$.

También, se pudo reemplazar directamente los componentes del vector solución U en la forma general de la ecuación lineal

$$\begin{aligned} 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 1(-1) + 2(1) + 3(1) &= 4 \\ 4 &= 4 \end{aligned}$$

2.1.4. Casos de soluciones de ecuaciones lineales según sus coeficientes y término independiente.

Sea la ecuación lineal

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = b$$

Se analizan los siguientes casos:

i) $a_1 \neq 0$
ii) $\forall$ i, ai = 0 y b $\neq$ 0
iii) $\forall$ i, ai = 0 y b = 0

2.1.4.1. Caso 1: $a_1 \neq 0$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = b$$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$$

$$x_1 = \frac{b}{a_1} - \left(\frac{a_2}{a_1}x_2 + \frac{a_3}{a_1}x_3 + \ldots + \frac{a_n}{a_1}x_n\right)$$

Dando valores a x_2, x_3,…y x_n, se halla un valor para x_1. x_1 depende de las otras incógnitas. Entonces, una ecuación con más de una incógnita tiene infinitas soluciones.

2.1.4.2. Caso 2: $\forall$ i, $a_i = 0$ y $b \neq 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = b$$

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \ldots + 0x_n = b$$

Se observa que $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \ldots + 0x_n$ es cero porque toda cantidad multiplicada por cero resulta cero. Entonces, la ecuación lineal queda así:

$$0 = b$$

Además, la condición del caso expresa que $b \neq 0$.

Como es imposible que se cumplan $0=b$ y $b \neq 0$ simultáneamente, se concluye que la ecuación de este caso no tiene solución. Es decir, X no tiene vector solución U.

2.1.4.3. Caso 3: $\forall$ i, $a_i = 0$ y $b = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0$$

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \ldots + 0x_n = 0$$

Como el producto $0x_i$ es cero, la sumatoria de los $0x_i$ es cero en el miembro de la izquierda de la ecuación. Entonces, cualesquier valores de las incógnitas satisfacen la ecuación.

Todo vector $U = (u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n)$ es solución de la ecuación.

2.1.5. Casos de ecuaciones lineales según sus incógnitas.

Se presentan los siguientes casos:

i) Una sola ecuación con dos incógnitas.

ii) Una sola ecuación con tres incógnitas.

iii) Una sola ecuación con más de tres incógnitas.

2.1.5.1. Una sola ecuación con dos incógnitas tiene como conjunto solución

Una recta en el plano. En general, esta ecuación es $a_1x_1+a_2x_2=b$.

Ejemplo 2:

Sean el plano formado por los ejes x_1 y x_2, y la ecuación lineal dada por $x_1+x_2=1$.

La recta L es el conjunto de pares ordenados (u_1, u_2) y constituye el conjunto solución de la ecuación lineal $x_1+x_2=1$.

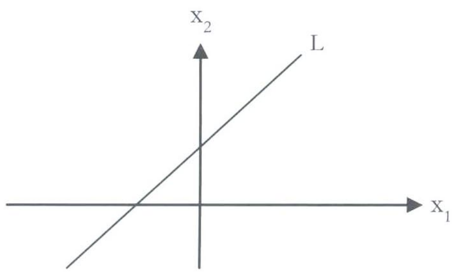


Figura 2.1

Su forma matricial es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 1$$

Su vector solución es:

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Reemplazando el vector solución U en el vector X:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = u_1$$

$$x_2 = u_2$$

Reemplazando u_1 y u_2 en la ecuación lineal: $u_2+u_1=1$

Y despejando u_2, se tiene: $u_2 = 1-u_1$

Se observa que a cada valor de u_2 le corresponde un solo valor de u_1.

Resumiendo U:

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ 1-u_1 \end{bmatrix}$$

Asignando U a X:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ 1-u_1 \end{bmatrix}$$

Dando diversos valores a u_1 se tiene el conjunto solución U o conjunto de pares ordenados (u_1, u_2) de la recta L.

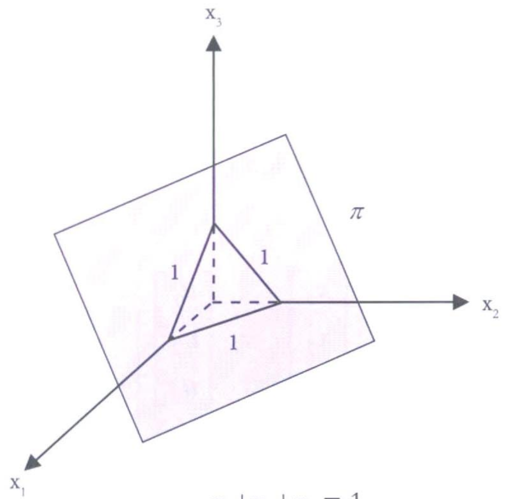
2.1.5.2. Una sola ecuación con tres incógnitas tiene como conjunto solución un plano en el espacio.

En general, la ecuación es $a_1 x_1+a_2 x_2+a_3 x_3=b$..

Ejemplo:

Sean el espacio formado por los ejes x_1 , x_2 y x_3, y la ecuación lineal dada por $x_1+x_2+x_3=1$.

El plano es el conjunto de pares ordenados (u_1, u_2, u_3) y constituye el conjunto solución de la ecuación lineal $x_1+x_2+x_3=1$.



$x_1+x_2+x_3 = 1$

Figura 2.2

Escribiendo sus coeficientes explícitamente

$$1x_1+1x_2+1x_3 = 1$$

Su forma matricial es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 1$$

Su vector solución es:

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Reemplazando el vector solución U en el vector $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = u_1$$

$$x_2 = u_2$$

$$x_3 = u_3$$

Reemplazando u_1, u_2 y u_3 en la ecuación lineal: $u_1+u_2+u_3=1$.

Y despejando u_3, se tiene: $u_3 = 1 - u_1 - u_2$.

Se observa que a cada valor de u_3 le corresponde un solo par de valores de u_1 y u_2.

Resumiendo U:

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 1-u_1-u_2 \end{bmatrix}$$

Asignando U a X:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 1-u_1-u_2 \end{bmatrix}$$

Dando diversos valores a u_1 y u_2 se tiene el conjunto solución U o conjunto de pares ordenados (u_1, u_2, u_3) del plano π .

2.1.5.3. Una sola ecuación con más de tres incógnitas tiene como conjunto solución una interpretación geométrica muy difícil de representar gráficamente.

En general, la ecuación es $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\ldots+a_nx_n=b$.

$$x_1 = \frac{b}{a_1} - \left(\frac{a_2}{a_1}x_2 + \frac{a_3}{a_1}x_3 + \ldots + \frac{a_n}{a_1}x_n\right)$$

2.2. El sistema de ecuaciones lineales

2.2.1. Forma tradicional de un sistema de ecuaciones lineales.

Recordando a un sistema de ecuaciones lineales como el que sigue a continuación:

$$\begin{aligned} 1x_1 - 2x_2 + 1x_3 &= 7 \\ 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 &= 6 \\ 3x_1 + 2x_2 - 1x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Donde las incógnitas son x_1, x_2 y x_3; los términos independientes son 7, 6 y 1; y los coeficientes del sistema son 1, -2, 1, 2, -5, 2, 3, 2 y -1.

Dicho sistema se resuelve hallando los valores de las incógnitas x_1, x_2 y x_3.

En general, un sistema de ecuaciones lineales puede tener un número de ecuaciones distinto al número de incógnitas.

2.2.2. Forma matricial de un sistema de ecuaciones lineales

Si se considera una matriz rectangular A de mxn, una matriz columna X de nx1 y el número de columnas de A es igual al número de filas de X, entonces, un sistema de ecuaciones lineales está definido cuando el producto escalar de dichas matrices es igual a una matriz columna B de mx1. En general, m ≠ n.

A es de orden mxn,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

, con $a_{ii} \in R^1$ e i, j=1, 2, 3,…, n.

A se denomina matriz de coeficientes o matriz asociada del sistema.

X es de orden nx1,

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

, x_j representa a las variables de un proceso, con j=1, 2, 3,…, n.

X se denomina matriz de las incógnitas.

B es de orden mx1,

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$, b_j representa a los términos constantes, $b_j \in R^1$ con $j=1, 2, 3, \ldots, m$.

B se denomina matriz de los términos independientes.

Ahora considérese el producto de la matriz A por la matriz columna X, que de acuerdo a la sección 1.2.4, el producto A.X es igual a la matriz de escalares B.

$$A.X = B$$

La ecuación A.X = B se denomina forma matricial de un sistema de ecuaciones lineales.

La forma matricial detallada de la ecuación A.X=B se escribe de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Efectuando el producto indicado en el primer miembro de la ecuación matricial, se tiene:

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & a_{13}x_3 + & \dots & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & a_{23}x_3 + & \dots & a_{2n}x_n \\ a_{31}x_1 + & a_{32}x_2 + & a_{33}x_3 + & \dots & a_{3n}x_n \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1}x_1 & a_{m2}x_2 & a_{m3}x_3 & \dots & a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

De acuerdo a la definición de igualdad de matrices de la sección 1.1.10, una fila de la matriz del primer miembro es igual a la respectiva fila de la matriz del segundo miembro.

Luego, la forma matricial del sistema se puede convertir a la forma tradicional de un sistema de ecuaciones lineales, como sigue a continuación:

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

Donde:

a_{ij} representa a los coeficientes del sistema de ecuaciones lineales.

x_j representa a las incógnitas del sistema.

b_i representa a los términos independientes del sistema.

El sistema de ecuaciones lineales también se puede escribir en forma general de la siguiente manera:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

2.2.3. Vector solución de un sistema de ecuaciones lineales

Sea la matriz columna U= $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ cuyos elementos u_i son escalares

Y el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Se dice que el vector solución U está definido cuando los u_i satisfacen a dicho sistema. Es decir, cuando $x_1 = u_1$, $x_2 = a_2$, $x_3 = u_3$,..., $x_n = u_n$.

Ejemplo 4:

Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

con el vector solución U = (2, 8, 21), se verifica que el vector solución U satisface el sistema tal como se ve a continuación:

El vector solución U = (2, 8, 21) se puede reescribir así:

$$U = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 21 \end{bmatrix}$$

Reemplazando las variables x_i del sistema con los componentes de U, se tiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Efectuando el producto en el miembro de la izquierda, se tiene:

$$\begin{pmatrix} 1(2)+ & (-2)(8)+ & 1(21) \\ 2(2)+ & (-5)(8) & 2(21) \\ 3(2)+ & 2(8)+ & (-1)(21) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se observa que al reemplazar el vector solución U en la ecuación lineal se llega a la identidad

$$\begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Luego, se reconoce a U = (2, 8, 21) como el vector solución del sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2.2.4. Tipos de sistemas de ecuaciones lineales

Un sistema de ecuaciones lineales puede ser cuadrado, rectangular u homogéneo.

2.2.4.1. Sistema cuadrado de ecuaciones lineales

Un sistema cuadrado de ecuaciones lineales es aquel sistema que tiene n ecuaciones y n incógnitas. Es decir, el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas. Su forma matricial desarrollada se puede ver a continuación:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Su forma simplificada es:

$$A.X = B$$

La matriz asociada es A de orden nxn.
La matriz de incógnitas es X de orden nx1.
La matriz de términos independientes es B de orden nx1.

2.2.4.2. Sistema rectangular de ecuaciones lineales

Un sistema rectangular de ecuaciones lineales es aquel sistema que tiene m ecuaciones y n incógnitas. Es decir, el número de ecuaciones es diferente al número de incógnitas. Su forma matricial desarrollada se puede ver a continuación:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Su forma simplificada es:

$$A.X = B$$

La matriz asociada es A de orden mxn.
La matriz de incógnitas es X de orden nx1.
La matriz de términos independientes es B de orden mx1.

2.2.4.3. Sistema homogéneo de ecuaciones lineales

Un sistema homogéneo de ecuaciones lineales es aquel sistema que tiene todos los términos independientes b_i iguales a cero.

El sistema homogéneo puede ser rectangular, cuando el número de ecuaciones es diferente al número de incógnitas; $m \neq n$.

También, un sistema homogéneo puede ser cuadrado cuando el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas; $m=n$.

En general, un sistema homogéneo tiene la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Su forma simplificada es

$$A.X = O$$

La matriz asociada es A de orden mxn.
La matriz de incógnitas es X de orden nx1.
La matriz de términos independientes es B de orden mx1.
De acuerdo a la sección 1.1.11 de tipos de matrices, O mayúscula es la matriz cero. Entonces, $B=O_{mx1}$.

2.2.5. Resolución de un sistema cuadrado de ecuaciones lineales

Un sistema con un número de ecuaciones igual al número de incógnitas, se puede resolver por el método de Cramer, el de eliminación de Gauss-Jordan, el de eliminación de Gauss y el de la inversa de la matriz de coeficientes.

2.2.5.1. Resolución de un sistema cuadrado de ecuaciones lineales por el método de Cramer

El método de Cramer utiliza un cociente de determinantes para cada incógnita.

Sea el sistema cuadrado de ecuaciones lineales

$$A.X = B$$

ó

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

El método de Cramer tiene los siguientes pasos:

a) Identificar las matrices A, X y B.

A de orden nxn, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

b) Verificar que A es una matriz invertible para poder aplicar el método de Cramer.

c) Hallar una matriz Ck obtenida de A al reemplazar la k-ésima columna de A por el vector columna B.

d) Calcular la solución única dada por $x_k = \dfrac{\det(B_k)}{\det(A)}$ para k=1,…, n

Ejemplo 5:

Resuelva el sistema por el método de Cramer

$$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 + 1x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 \quad\quad &= 3 \\ 1x_1 + 1x_2 - 1x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Solución:

a) Identificar las matrices A, X y B.

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Verificar que A es una matriz invertible. Excepto cuando el problema lo declare.

De acuerdo a la sección 1.1.11.4 literal j, sobre tipos de matrices cuadradas, A será invertible cuando $\det(A) \neq 0$.

$$\mathrm{Det}(A) = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -15 \quad \mathrm{Det}(A) \neq 0.$$

Luego, A es una matriz invertible y se puede aplicar el método de Cramer.

c) Hallar una matriz C_k obtenida de A al reemplazar la k-ésima columna de A por el vector columna B.

Para k=1, la 1ra.columna de A es reemplazada por $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow C_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \mathrm{Det}(C_1) = -5$$

Para k=2, la 2da.columna de A es reemplazada por $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow C_2 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \mathrm{Det}(C_2) = -15$$

Para k=3, la 3ra.columna de A es reemplazada por $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow C_3 = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \mathrm{Det}(C_3) = -20$$

d) Calcular la solución única de cada incógnita, dada por $x_k = \frac{\det(C_k)}{\det(A)}$ para k=1,…, n

Para k=1, $x_1 = \dfrac{\det(C_1)}{\det(A)} = \dfrac{-5}{-15} = \dfrac{1}{3}$

Para k=2, $x_2 = \dfrac{\det(C_2)}{\det(A)} = \dfrac{-15}{-15} = 1$

Para k=3, $x_3 = \dfrac{\det(C_3)}{\det(A)} = \dfrac{-20}{-15} = \dfrac{4}{3}$

Luego, el conjunto solución del sistema es $U = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1 \\ 4/3 \end{bmatrix}$. El sistema es consistente porque tiene solución.

2.2.5.2. Resolución de un sistema cuadrado de ecuaciones lineales por el método de eliminación de Gauss-Jordan

El método de eliminación de Gauss-Jordan utiliza las operaciones elementales para obtener la forma escalonada reducida de la matriz ampliada del sistema.

Sea el sistema cuadrado de ecuaciones lineales

$$A.X = B$$

El método de eliminación de Gauss-Jordan tiene los siguientes pasos:

a) Construya la matriz aumentada (A | B). La matriz A está a la izquierda de la partición y la matriz B está a la derecha.
b) Efectúe operaciones elementales en fila para reducir (A | B) a (I | U). Se llega a (I | U) porque se tiene un sistema cuadrado.
c) Entonces, el conjunto solución del sistema es U.

Ejemplo 6:

Resuelva el sistema cuadrado de ecuaciones lineales por el método de eliminación de Gauss-Jordan.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solución:

a) Construya la matriz aumentada (A | B). La matriz A está a la izquierda de la partición y la matriz B está a la derecha.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(A \mid B) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 2 & -5 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

b) Efectúe operaciones elementales en fila para reducir $(A \mid B)$ a $(I \mid D)$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 2 & -5 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$F_2+(-2)F_1$ y $F_3 + (-3)F_1$: $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 0 & -8 \\ 0 & 8 & 4 & -20 \end{array}\right]$$

$(-1)F_2$: $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & 4 & -20 \end{array}\right]$$

$F_1+(2)F_2$ y $F_3+(-8)F_2$: $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 23 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -4 & -84 \end{array}\right]$$

$(-\frac{1}{4})F_3$: $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 23 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 21 \end{array}\right]$$

$F_1+(-1)F_3$: $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 21 \end{array}\right]$$

Luego,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 21 \end{array}\right] = (I \mid U)$$

c) Entonces, el conjunto solución del sistema es $U = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 21 \end{bmatrix}$

2.2.5.3. Resolución de un sistema cuadrado de ecuaciones lineales por el método de eliminación de Gauss.

El método de eliminación de Gauss utiliza las operaciones elementales para obtener la forma escalonada de la matriz ampliada del sistema.

Se puede revisar la sección 2.2.6.1 donde se aplica el método de eliminación de Gauss en la resolución de una sistema rectangular.

2.2.5.4. Resolución de un sistema cuadrado de ecuaciones lineales por el método de la inversa de la matriz de coeficientes.

Sea el sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas

$$A.X = B$$

Si la matriz de coeficientes A es una matriz invertible de tamaño nxn, el sistema es compatible determinado y su única solución es $A^{-1}B$.

Ejemplo 7:

Dado el siguiente sistema

$$\begin{aligned} X_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 3 \\ X_1 \qquad + 8x_3 &= 17 \end{aligned}$$

Solución:

La forma matricial desarrollada del sistema es

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$$

La matriz de coeficientes es A= $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

Para verificar si A es invertible se puede construir la matriz (A | I) tal como se ve a continuación:

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Efectuando operaciones elementales hasta que el lado izquierdo se reduce a I donde la matriz final tendrá la forma (I | A^{-1})

Se obtiene

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

Se observa que la matriz A es invertible y su inversa es

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Retomando el sistema, su solución es

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$$

Multiplicando las matrices

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

O bien,

$x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2$

2.2.6. Resolución de un sistema rectangular de ecuaciones lineales

Un sistema lineal con un número de ecuaciones diferente al número de incógnitas, se puede resolver por el método de eliminación de Gauss y por el método de eliminación de Gauss-Jordan.

Como se puede apreciar en la sección 2.2.6.2, Gauss-Jordan trabaja hasta la forma escalonada reducida mientras que en la sección 2.2.6.1, Gauss opera hasta la forma escalonada.

2.2.6.1. Resolución de un sistema rectangular de ecuaciones lineales por el método de eliminación de Gauss

Consiste en la reducción a la forma escalonada de la matriz ampliada del sistema mediante operaciones elementales.

Cabe destacar que el método de eliminación de Gauss también se puede aplicar a cualquier sistema de ecuaciones lineales.

En general, sea el sistema rectangular de ecuaciones lineales.

$$\begin{bmatrix} 1 & -6 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -9/16 & -1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

o,

$$A.X = B$$

a) Construya la matriz aumentada (A | B). La matriz A está a la izquierda de la partición y la matriz B está a la derecha.
b) Efectúe operaciones elementales en fila para reducir la matriz ampliada del sistema (A | B) a la forma escalonada. No se tiene que llegar a (I | U) porque el sistema no es cuadrado, ahora es rectangular.
c) Entonces, el conjunto solución del sistema se deduce a partir de la forma escalonada con la técnica de sustitución hacia atrás o simplemente por inspección.

Ejemplo 8:

Resuelva el sistema rectangular de 4 ecuaciones con tres incógnitas por el método de eliminación de Gauss.

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 2 & -4 & 3 \\ 4 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Solución:

a) Construya la matriz aumentada (A | B). La matriz A está a la izquierda de la partición y la matriz B está a la derecha.

$$(A \mid B) = \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & -4 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & 3 & -4 \\ 4 & -8 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

b) Efectúe operaciones elementales en fila para reducir (A | B) a la forma escalonada.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & 3 & -4 \\ 4 & -8 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

$(\frac{1}{2})F_1$:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 3 & -4 \\ 4 & -8 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

$F_2+(-2)F_1$ y $F_3+(-4)F_1$:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

F_4+F_2 y F_3+F_2:
$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

A continuación, se procede a buscar el vector solución.

c) El vector solución del sistema se deduce de la forma escalonada

Esta forma escalonada tiene 3 columnas de incógnitas y una cuarta de términos independientes.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & b \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Son 3 incógnitas: x_1, x_2 y x_3

Esta forma escalonada tiene 4 filas donde las dos primeras tienen pivote, también denominado uno principal.

Uno principal

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Un pivote es el primer 1 de la fila o el primer 1 a la derecha de ceros.

Son 2 pivotes.

Las dos últimas filas están llenas de ceros por lo que no se consideran para simplificar el trabajo. Normalmente, debería existir un pivote en cada fila de acuerdo al número de variables. Si son 3 variables, entonces, deberían haber 3 pivotes.

Pero en este ejemplo, la forma escalonada tiene 2 pivotes y 3 variables. En casos como estos, las variables se clasifican en variables libres y variables ligadas. Las variables libres asumen un parámetro mientras que las variables ligadas se expresan en función de las variables libres.

El número de variables ligadas es igual al número de pivotes.

Si se tienen 2 pivotes, entonces, son 2 variables ligadas.

Uno principal

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Se tiene uno principal en la columna 1 de la primera fila. Entonces, x_1 es variable ligada.

Se tiene un uno principal en la columna 3 de la segunda fila. Entonces, x_3 es variable ligada.

El número de variables libres es igual a la diferencia del número de incógnitas con el número de pivotes.

Si se tienen 3 variables y 2 pivotes, entonces, es 1 variable libre (3-2=1).

Aquí no hay uno principal. Entonces, x_2 es variable libre

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Las variables ligadas x_1 y x_3 se pueden calcular cuando se asignan valores cualesquiera a la variable libre x_2.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sea U el vector solución del sistema

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Donde u_1, u_2 y u_3 representan a los valores que pueden tomar las variables x_1, x_2 y x_3 respectivamente. Es decir, $x_1=u_1$, $x_2=u_2$ y $x_3=u_3$.

Reemplazando el vector U en el vector X.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Efectuando el producto indicado del primer miembro de la forma matricial del sistema, se tienen las ecuaciones (1) y (2):

$$u_1 - 2u_2 + u_3 = -1 \qquad (1)$$
$$0u_1 + 0u_2 + u_3 = -2 \qquad (2)$$

Hallando el valor u_3 a partir de la ecuación (2):

$$u_3 = -2 \qquad (3)$$

Reemplazando (3) en (1):

$$u_1 - 2u_2 + 1(-2) = -1$$

Despejando u_1 se obtiene:

$$u_1 = 1 + 2u_2 \qquad (4)$$

(3) y (4) en el vector solución U:

$$U= \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2u_2 \\ u_2 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

Se observa que u_1 depende de u_2, y a su vez, u_2 puede adoptar todo valor real. Pero u_3 tiene el valor -2 fijo.

Asignando cualquier valor a u_2 se obtiene el vector solución respectivo de acuerdo a la terna dada en (5).

2.2.6.2. Resolución de un sistema rectangular de ecuaciones lineales por el método de eliminación de Gauss-Jordan

El método de eliminación de Gauss-Jordan utiliza las operaciones elementales para obtener la forma escalonada reducida de la matriz ampliada del sistema.

Sea el sistema rectangular de ecuaciones lineales

$$A.X = B$$

El método de eliminación de Gauss-Jordan tiene los siguientes pasos:

a) Construya la matriz aumentada (A | B). La matriz A está a la izquierda de la partición y la matriz B está a la derecha.
b) Efectúe operaciones elementales en fila para reducir (A | B) a (I | C).
c) Entonces, el conjunto solución del sistema se deduce de (I|C).

Ejemplo 9:

Resuelva el sistema rectangular de ecuaciones lineales por el método de eliminación de Gauss-Jordan

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Solución:

d) Construya la matriz aumentada (A | B). La matriz A está a la izquierda de la partición y la matriz B está a la derecha.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$(A \mid B) = \left[\begin{array}{ccc:c} 3 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

e) Efectúe operaciones elementales en fila para reducir (A | B) a (I | D).

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

F_1 - F_2: $$\begin{bmatrix} 1 & -6 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

F_2 + (-1)F_1: $$\frac{9}{16}$$

(1/16)F_2: $$\begin{bmatrix} 1 & -6 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -9/16 & -1/4 \end{bmatrix}$$

F_1 + (6)F_2: $$\frac{9}{16}$$

El sistema equivalente es:

$$1x_1 + 0x_2 + \frac{5}{8}x_3 = \frac{3}{2}$$

$$0x_1 + 1x_2 - \frac{9}{16}x_3 = -\frac{1}{4}$$

Pasando x_3 al segundo miembro:

$$1x_1 + 0x_2 = \frac{3}{2} - \frac{5}{8}x_3$$

$$0x_1 + 1x_2 = -\frac{1}{4} + \frac{9}{16}x_3$$

$$x_1 = \frac{3}{2} - \frac{5}{8}x_3$$

$$x_2 = -\frac{1}{4} + \frac{9}{16}x_3$$

Haciendo $x_3 = t$, tenemos:

$$x_1 = \frac{3}{2} - \frac{5}{8}t$$

$$x_2 = -\frac{1}{4} + \frac{9}{16}t$$

$$x_3 = t$$

Entonces, el conjunto solución del sistema es:

$$U = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} - \frac{5}{8}t \\ -\frac{1}{4} + \frac{9}{16}t \\ t \end{bmatrix}$$

2.2.7. Resolución de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo

Un sistema homogéneo puede ser rectangular o cuadrado. Cabe recordar que este tipo de sistema tiene una matriz de términos independientes igual al vector cero.

La solución de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo se puede alcanzar por el método de eliminación de Gauss-Jordan y por el método de eliminación de Gauss.

Como se puede apreciar en la sección 2.2.7.2, Gauss-Jordan trabaja hasta la forma escalonada reducida mientras que en la sección 2.2.7.1, Gauss opera hasta la forma escalonada.

2.2.7.1 Resolución de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo por el método de eliminación de Gauss

Consiste en obtener la forma escalonada de la matriz ampliada del sistema homogéneo mediante operaciones elementales.

Cabe destacar que el método de eliminación de Gauss también se puede aplicar a cualquier sistema homogéneo de ecuaciones lineales sin importar el número de incógnitas ni el número de ecuaciones.

Ejemplo 10:

Resuelva el sistema de ecuaciones lineales homogéneo por el método de eliminación de Gauss.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \\ -1 & -11 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solución:

a) Construya la matriz aumentada (A | B). La matriz A está a la izquierda de la partición y la matriz B está a la derecha.

$$(A \mid B) = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 6 & 0 \end{array}\right]$$

b) Efectúe operaciones elementales en fila para reducir (A | B) a la forma escalonada.

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 6 & 0 \end{array}\right]$$

$F_2+(-3)F_1$ y F_3+F_1: $$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -9 & 5 & 0 \\ 0 & -9 & 5 & 0 \end{array}\right]$$

$F_3+(-1)F_2$: $$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -9 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$(-{}^1/_9)F_2$: $$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -{}^5/_9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$F_1+(-2)F_2$:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

c) El vector solución del sistema se deduce de la forma escalonada.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esta forma escalonada tiene 3 columnas de incógnitas y una cuarta de términos independientes.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & b \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Son 3 incógnitas: x_1, x_2 y x_3.

Esta forma escalonada tiene 3 filas donde las dos primeras tienen pivote, también denominado uno principal.

Uno principal
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Un pivote es el primer 1 de la fila o el primer 1 a la derecha de ceros.

Son 2 pivotes.

La última fila está llena de ceros por lo que no se considera para simplificar el trabajo.

Normalmente, debería existir un pivote en cada fila de acuerdo al número de variables. Si son 3 variables, entonces, deberían haber 3 pivotes.

Pero en este ejemplo, la forma escalonada tiene 2 pivotes y 3 variables. En casos como estos, las variables se clasifican en variables libres y variables ligadas. Las variables libres asumen un parámetro mientras que las variables ligadas se expresan en función de las variables libres.

El número de variables ligadas es igual al número de pivotes.

Si se tienen 2 pivotes, entonces, son 2 variables ligadas.

Uno principal

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & {}^{1}/_{9} & 0 \\ 0 & 1 & -{}^{5}/_{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Se tiene uno principal en la columna 1 de la primera fila. Entonces, x_1 es variable ligada.

Se tiene un uno principal en la columna 2 de la segunda fila. Entonces, x_2 es variable ligada.

El número de variables libres es igual a la diferencia del número de incógnitas con el número de pivotes.

Si se tienen 3 variables y 2 pivotes, entonces, hay 1 variable libre (3-2=1).

Aquí no hay uno principal.
Entonces, x_3 es variable libre

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & {}^{1}/_{9} & 0 \\ 0 & 1 & -{}^{5}/_{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Las variables ligadas x_1 y x_2 se pueden calcular cuando se asignan valores cualesquiera a la variable libre x_3.

La forma escalonada no tiene pivote en la tercera columna de la tercera fila. Entonces, se toma la variable x_3 como variable libre.

Se tiene pivote 1 en la columna 1 de la primera fila. Entonces, existe una variable ligada x_1.

Se tiene pivote 1 en la columna 2 de la segunda 2. Entonces, existe una variable ligada x_2.

Las variables ligadas x_1 y x_2 se pueden calcular cuando se asignan valores cualesquiera a la variable libre x_3.

Retomando la forma escalonada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & {}^{1}/_{9} & 0 \\ 0 & 1 & -{}^{5}/_{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{9} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{9} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Además, sea U el vector solución del sistema.

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Donde u_1, u_2 y u_3 representan a los valores que pueden tomar las variables x_1, x_2 y x_3 respectivamente. Es decir, $x_1=u_1$, $x_2=u_2$ y $x_3=u_3$.

Reemplazando el vector U en el vector X:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{9} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{9} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Efectuando el producto indicado del primer miembro de la forma matricial del sistema, se tienen las ecuaciones (1) y (2):

$u_1 + 0u_2 + \frac{1}{9} u_3 = 0$ (1)

$0u_1 + 1u_2 - \frac{5}{9} u_3 = 0$ (2)

Asignando un valor arbitrario 't' a u3

$u_3 = t$ (3)

Reemplazando (3) en (1):

$u_1 + {}^1{}_9\, t = 0$

Despejando u1 se obtiene:

$u_1 = -\, {}^1{}_9\, t$ (4)

Reemplazando (3) en (2):

$u_2 \;-\, {}^5{}_9\, t = 0$

Despejando u_2 se obtiene:

$u_2 \;= {}^5{}_9\, t$ (5)

Reemplazando (3), (4) y (5) en el vector U:

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\, {}^1{}_9\, t \\ {}^5{}_9\, t \\ t \end{bmatrix} \qquad (6)$$

Se observa que u_1 y u_2 dependen de u_3, y a su vez, u_3 puede adoptar cualquier valor real t.

Haciendo un ensayo con t=0, se tiene:

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\, {}^1{}_9\, t \\ {}^5{}_9\, t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\, {}^1{}_9(0) \\ {}^5{}_9(0) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Haciendo un ensayo con t=9, se tiene:

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -{}^1{}_9 t \\ {}^5{}_9 t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -{}^1{}_9(0) \\ {}^5{}_9(0) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

En general, asignando cualquier valor a t, ya que $u_3=t$, se obtiene el vector solución respectivo de acuerdo a la terna dada en (6).

2.2.7.2 Resolución de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo por el método de eliminación de Gauss-Jordan

Consiste en obtener la forma escalonada reducida de la matriz ampliada del sistema mediante operaciones elementales.

Cabe destacar que el método de eliminación de Gauss-Jordan también se puede aplicar a cualquier sistema homogéneo sin importar el número de incógnitas ni el número de ecuaciones.

Ejemplo 11:

Resuelva el sistema de ecuaciones lineales homogéneo por el método de Gauss-Jordan.

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 0 \\ x + y - z &= 0 \\ 4x + 2y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

Solución:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -18 & 0 \\ 0 & -2 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 17 & 0 \\ 0 & 1 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & -29 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 17 & 0 \\ 0 & 1 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

El conjunto solución es:

$$U = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Es decir, x = 0, y = 0, z = 0. El sistema tiene solución trivial única.

Ver la sección 2.2.8.6 sobre soluciones triviales.

2.2.8. Tipos de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales

2.2.8.1. Sistema consistente

Un sistema que tiene solución es consistente. En caso contrario, el sistema es inconsistente.

2.2.8.2. Sistema compatible

Un sistema de m ecuaciones y n incógnitas es compatible si la matriz escalonada reducida resultante no tiene un uno principal en la última columna.

El teorema de Rouché-Frobenius dicta que un sistema es compatible sí, y sólo si, las formas escalonadas de la matriz ampliada del sistema y la de coeficientes tienen el mismo número de unos principales.

2.2.8.3. Sistema compatible determinado

Un sistema compatible con todas las columnas excepto la última tienen un uno principal, entonces, el sistema es compatible determinado.

También, la matriz escalonada reducida de los coeficientes tiene n unos principales.

El teorema de Rouché-Frobenius dicta que un sistema es compatible determinado sí, y sólo si, el número de unos principales coincide con el número de incógnitas.

2.2.8.4. Sistema compatible indeterminado

Un sistema compatible con alguna columna que no es la última no tiene uno principal, entonces, el sistema es compatible indeterminado. Y tiene solución paramétrica.

El teorema de Rouché-Frobenius dicta que un sistema es compatible indeterminado sí, y sólo si, el número de unos principales es menor que el número de incógnitas.

2.2.8.5. Sistema incompatible

Un sistema de m ecuaciones y n incógnitas es incompatible si la matriz escalonada reducida resultante tiene un uno principal en la última columna.

El teorema de Rouché-Frobenius dicta que un sistema es incompatible si, y sólo si, la forma escalonada de la matriz ampliada del sistema tiene un uno principal más que la forma escalonada de la matriz de coeficientes.

2.2.8.6. Solución trivial y soluciones no triviales

Una solución es trivial cuando el vector solución es el vector cero. Una solución es no trivial cuando el vector solución es distinto del vector cero y se escribe en forma paramétrica.

Para un sistema de ecuaciones lineales homogéneo, se cumple una y sólo una de las siguientes proposiciones:

a) El sistema tiene sólo la solución trivial
b) El sistema tiene una infinidad de soluciones no triviales además de la trivial.

Cabe resaltar que si el sistema homogéneo tiene más incógnitas que ecuaciones, entonces, queda asegurado que este sistema tiene soluciones no triviales.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Halle la solución del sistema por el método de Gauss-Jordan.

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 9 \end{aligned}$$

Solución:

a) Construya la matriz aumentada (A|B). La matriz A está a la izquierda de la partición y la matriz B está a la derecha.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$(A \mid B) = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 9 \end{array}\right]$$

b) Efectúe operaciones elementales en fila para reducir (A|B) a (I|D).

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 9 \end{array}\right]$$

$F_3 - 3F_1$ y $F_2 - F_1$: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & -7 & 3 \end{array}\right]$

$F_2 - F_1$: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 3 \end{array}\right]$

$F_1 + 2F_2$: y $F_3 - 5F_2$: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & -4 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 18 & 18 \end{array}\right]$

$(1/18)F_3$: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & -4 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$

$F_1 + 7F_3$ y $F_2 + 5F_3$: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$

Luego,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = (I \mid U) \rightarrow U = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

c) Entonces, el conjunto solución del sistema es:

$$U = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

El sistema es consistente porque tiene solución.

2. Halle la solución del sistema por el método de Crammer.

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 9 \end{aligned}$$

Solución:

a) Identificar las matrices A, X y B.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

b) Verificar que A es una matriz invertible. Excepto cuando el problema lo declare.

De acuerdo a la sección 1.1.11.4 literal (j), sobre tipos de matrices cuadradas, A será invertible cuando det(A) $\neq 0$.

$$\text{Det}(A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 18 \rightarrow \text{Det}(A) \neq 0.$$

Luego, A es una matriz invertible y se puede aplicar el método de Crammer.

c) Hallar una matriz C_k obtenida de A al reemplazar la k-ésima columna de A por el vector columna B.

Para k=1, la 1ra.columna de A es reemplazada por $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix} \rightarrow C_1 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 9 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Det}(C_1) = 54$$

Para k=2, la 2da.columna de A es reemplazada por $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix} \rightarrow C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Det}(C_2) = 36$$

Para k=3, la 3ra.columna de A es reemplazada por $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix} \rightarrow C_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Det}(C_3) = 18$$

d) Calcular la solución única de cada incógnita, dada por $x_k = \dfrac{\det(C_k)}{\det(A)}$ para k=1,…,n.

Para k=1, $x_1 = \dfrac{\det(C_1)}{\det(A)} = \dfrac{54}{18} = 3$

Para k=2, $x_2 = \dfrac{\det(C_2)}{\det(A)} = \dfrac{36}{18} = 2$

Para k=3, $x_3 = \dfrac{\det(C_3)}{\det(A)} = \dfrac{18}{18} = 1$

Luego, el conjunto solución del sistema es U = $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. El sistema es consistente porque tiene solución.

3. Resuelva el sistema por el método de la reducción a la forma escalonada por filas.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 2x_4 &= 4 \\ x_1 \qquad\quad - x_3 + x_4 &= 5 \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \qquad &= -2 \end{aligned}$$

Solución:

a) Construya la matriz aumentada (A | B). La matriz A está a la izquierda de la partición y la matriz B está a la derecha.

$$(A \mid B) = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 6 & -4 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 5 \\ -3 & 2 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

b) Efectúe operaciones elementales en fila para reducir (A | B) a la forma escalonada.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 6 & -4 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 5 \\ -3 & 2 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

$F_1 - F_2$:
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 5 \\ -3 & 2 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

$F_2 - F_1$ y $F_3 + 3F_1$:
$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 6 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -6 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 20 & -11 & 3 & -5 \end{array}\right]$$

$(-1/6)F_2$:
$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 6 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1/3 & 0 & -1 \\ 0 & 20 & -11 & 3 & -5 \end{array}\right]$$

$F_3 - 20F_2$:
$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 6 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1/3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -13/3 & 3 & 15 \end{array}\right]$$

$(-3/13)F_3$:
$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 6 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1/3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -9/13 & -45/13 \end{array}\right]$$

$F_2 + (1/3)F_3$ y $F_1 + 3F_3$:
$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 6 & 0 & -14/13 & -148/13 \\ 0 & 1 & 0 & -3/13 & -28/13 \\ 0 & 0 & 1 & -9/13 & -45/13 \end{array}\right]$$

$F_1 - 6F_2$:
$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 4/13 & 20/13 \\ 0 & 1 & 0 & -3/13 & -28/13 \\ 0 & 0 & 1 & -9/13 & -45/13 \end{array}\right]$$

c) Entonces, el conjunto solución del sistema se deduce de la forma escalonada final.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4/13 & 20/13 \\ 0 & 1 & 0 & -3/13 & -28/13 \\ 0 & 0 & 1 & -9/13 & -45/13 \end{array}\right]$$

Se tiene pivote 1 en la columna 1 de fila 1. Entonces, existe una variable ligada x_1.

Se tiene pivote 1 en la columna 2 de fila 2. Entonces, existe una variable ligada x_2.

Se tiene pivote 1 en la columna 3 de fila 3. Entonces, existe una variable ligada x_3.

No se tiene pivote en columna 4 de cuarta fila porque no hay fila 4. Entonces, existe una variable libre x_4.

Las variables ligadas x_1, x_2 y x_3 se pueden calcular cuando se asignan valores cualesquiera a la variable libre x_4.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4/13 & 20/13 \\ 0 & 1 & 0 & -3/13 & -28/13 \\ 0 & 0 & 1 & -9/13 & -45/13 \end{array}\right]$$

Convirtiendo la matriz ampliada escalonada a la forma matricial del sistema.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4/13 \\ 0 & 1 & 0 & -3/13 \\ 0 & 0 & 1 & -9/13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20/13 \\ -28/13 \\ -45/13 \end{bmatrix}$$

Además, sea U el vector solución del sistema:

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$$

Donde u_1, u_2, u_3 y u_4 representan a los valores que pueden tomar las variables x_1, x_2, x_3 y x_4 respectivamente. Es decir, $x_1=u_1$, $x_2=u_2$, $x_3=u_3$ y $x_4=u_4$.

Reemplazando el vector U en el vector X.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4/13 \\ 0 & 1 & 0 & -3/13 \\ 0 & 0 & 1 & -9/13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20/13 \\ -28/13 \\ -45/13 \end{bmatrix}$$

Efectuando el producto indicado del primer miembro de la forma matricial del sistema, se tienen las ecuaciones (1), (2) y (3):

$$u_1 + 4/13\, u_4 = 20/13 \qquad (1)$$

$$u_2 - 3/13\, u_4 = -28/13 \qquad (2)$$

$$u_3 - 9/13\, u_4 = -45/13 \qquad (3)$$

Se observa que u_4 aparece en las ecuaciones (1), (2) y (3); y u_4 representa a un valor cualquiera de la variable libre x_4.

Despejando u_1, u_2 y u_3 en función de u_4:

$u_1 = {}^{20}\!/_{13} - {}^{4}\!/_{13}\, u_4$ (4)

$u_2 = {}^{-28}\!/_{13} + {}^{3}\!/_{13}\, u_4$ (5)

$u_3 = {}^{-45}\!/_{13} + {}^{9}\!/_{13}\, u_4$ (6)

Reemplazando (4), (5) y (6) en el vector solución U:

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{20}\!/_{13} - {}^{4}\!/_{13}u_4 \\ {}^{-28}\!/_{13} + {}^{3}\!/_{13}u_4 \\ {}^{-45}\!/_{13} + {}^{9}\!/_{13}u_4 \\ u_4 \end{bmatrix} \qquad (7)$$

Haciendo un ensayo con $u_4=0$, se tiene:

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{20}\!/_{13} - {}^{4}\!/_{13}u_4 \\ {}^{-28}\!/_{13} + {}^{3}\!/_{13}u_4 \\ {}^{-45}\!/_{13} + {}^{9}\!/_{13}u_4 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{20}\!/_{13} - {}^{4}\!/_{13}(0) \\ {}^{-28}\!/_{13} + {}^{3}\!/_{13}(0) \\ {}^{-45}\!/_{13} + {}^{9}\!/_{13}(0) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{20}\!/_{13} \\ {}^{-28}\!/_{13} \\ {}^{-45}\!/_{13} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Haciendo un ensayo con $u_4=1$, se tiene:

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{20}\!/_{13} - {}^{4}\!/_{13}u_4 \\ {}^{-28}\!/_{13} + {}^{3}\!/_{13}u_4 \\ {}^{-45}\!/_{13} + {}^{9}\!/_{13}u_4 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{20}\!/_{13} - {}^{4}\!/_{13}(1) \\ {}^{-28}\!/_{13} + {}^{3}\!/_{13}(1) \\ {}^{-45}\!/_{13} + {}^{9}\!/_{13}(1) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{16}\!/_{13} \\ {}^{-25}\!/_{13} \\ {}^{-36}\!/_{13} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Asignando otros valores a u_4, se obtiene el respectivo vector solución del sistema de acuerdo a la condición dada en (7).

4. Dados los tres pares de datos (0, -1), (1, 1) y (2, 0), halle el polinomio de interpolación de dichos pares de datos. Estime el valor de y si x=2/3. (BRU)

   Solución:

Siempre se puede obtener un polinomio de grado n-1 que pase por n pares de datos. Este polinomio se llama "polinomio de interpolación de los n pares de datos".

El polinomio que interpola a estos tres pares de datos es de grado menor o igual que 2. Sea:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

Este polinomio debe cumplir que p(0) = -1, p(1) = 1 y p(2) = 0, es decir:

$$\begin{aligned} a_0 \qquad\qquad\quad &= -1 \\ a_0 + a_1 + a_2 &= 1 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 &= 0 \end{aligned}$$

Este sistema tiene como solución $a_0 = -1$, $a_1 = 7/2$ y $a_2 = -3/2$

Luego, el polinomio de interpolación es:

$$p(x) = -1 + \frac{7}{2}x - \frac{3}{2}x^2$$

Y la estimación pedida es p(2/3) = 2/3.

5. Se desea organizar el tráfico por las calles de una ciudad que se representan en el diagrama de la figura. Llegan 120 y 100 vehículos por hora a los puntos A y D, mientras que de los puntos B y C salen 110 vehículos por hora. Halle los posibles flujos de tráfico entre las calles. (BRU)

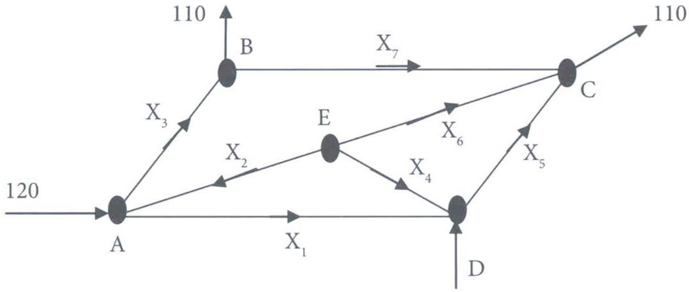


Figura 2.3

Solución:

Se trata de un ejercicio de una red de flujo, que se entiende como un conjunto de puntos conectados entre sí por canales, por lo que se transporta cierto tipo de materia o energía. Se siguen dos reglas básicas:

i) En cada punto de la red, la cantidad de flujo que llega debe ser igual al flujo que sale.
ii) El flujo total de la red es constante, es decir, el flujo de entrada en la red debe ser igual al flujo de salida.

De la figura se verifica lo siguiente:

Los flujos x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 y x_7 representan al número de vehículos por hora que circulan por las respectivas calles.

El flujo de entrada a la red es 120 + 100 = 220
El flujo de salida de la red es 110 + 110= 220

Luego, el flujo total de la red es constante, porque los flujos de entrada y salida de la red son iguales.

De los puntos A, B, C, D y E de la figura se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{array}{lrcl}
\text{Punto A:} & x_1 - x_2 + x_3 & = & 120 \\
\text{Punto B:} & x_3 - x_7 & = & 110 \\
\text{Punto C:} & x_5 + x_6 + x_7 & = & 110 \\
\text{Punto D:} & -x_1 + x_4 + x_5 & = & 100 \\
\text{Punto E:} & +x_2 - x_4 + x_6 & = & 0
\end{array}$$

La matriz ampliada del sistema es:

$$\begin{bmatrix}
1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 120 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 110 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 110 \\
-1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 100 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

La matriz escalonada reducida:

$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 10 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 110 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 100 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

Las variables ligadas son x_1, x_2, x_3 y x_5 porque tienen pivote 1
Las variables libres son x_4, x_6 y x_7 porque no tienen pivote 1

Los flujos vienen definidos por

$$
\begin{aligned}
x1 &= 10 + x_4 - x_6 - x_7 \\
x2 &= \phantom{10 +{}} x_4 - x_6 \\
x3 &= 110 \phantom{{}+ x_4 - x_6} + x_7 \\
x5 &= 100 \phantom{{}+ x_4} - x_6 - x_7
\end{aligned}
$$

Debe considerarse solamente flujos no negativos, por lo que se deducen las siguientes desigualdades:

$$
\begin{aligned}
x_6 + x_7 &\leq 10 + x_4 \\
x_6 &\leq + x_4 \\
x_6 + x_7 &\leq 100
\end{aligned}
$$

Esto garantiza que si por cualquier causa se hubiera de prescindir de algún canal (por avería, obras o la causa que fuere), todavía sería posible transportar flujo.

Se observa que conociendo los flujos por los canales x_4, x_6 y x_7, se puede conocer el flujo en toda la red.

6. Se tienen tres fuerzas F_1, F_2 y F_3 aplicadas en tres puntos equidistantes P_1, P_2 y P_3 sobre una membrana elástica apoyada en sus extremos. Estas fuerzas generan desplazamientos de 3, 5 y 3 en los respectivos puntos.

Los coeficientes de influencia para el punto P_1 son $a_{11}=3$, $a_{12}=2$ y $a_{13}=1$. Para el punto 2 son $a_{21}=2$, $a_{22}=4$ y $a_{23}=1.5$. Para el punto P_3 son $a_{31}=1$, $a_{32}=2$ y $a_{33}=3$.

Se pide:

a) Obtener las fuerzas
b) Si se coloca un apoyo en el punto P_1, calcule los nuevos coeficientes de influencia y los desplazamientos generados.

Solución

a) Obteniendo las fuerzas

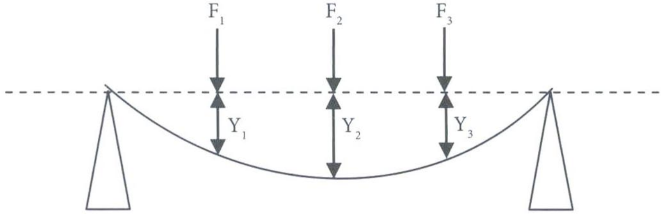


Figura 2.4

En general, el desplazamiento en el punto P_i es $y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} F_k$

Conociendo los desplazamientos, las fuerzas se pueden obtener mediante el siguiente sistema:

$$a_{11}F_1 + a_{12}F_2 + \ldots + a_{1n}F_n = y_1$$

$$a_{21}F_1 + a_{22}F_2 + \ldots + a_{2n}F_n = y_2$$

$$a_{31}F_1 + a_{32}F_2 + \ldots + a_{3n}F_n = y_3$$

Reemplazando datos en el sistema, se tiene:

$$3F_1 + 2F_2 + F_3 = 3$$

$$2F_1 + 4F_2 + 1.5F_3 = 5$$

$$F_1 + 2F_2 + 3F_3 = 3$$

La matriz ampliada del sistema es:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1.5 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Su forma escalonada es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2\,3 & 1\,3 & 1 \\ 0 & 8\,3 & 5\,6 & 3 \\ 0 & 4\,3 & 8\,3 & 2 \end{bmatrix}$$

Su forma escalonada reducida es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2/9 \\ 0 & 1 & 0 & 19/18 \\ 0 & 0 & 1 & 2/9 \end{bmatrix}$$

Las fuerzas son:

$$F_1 = \frac{2}{9}, \ F_2 = \frac{19}{18} \ \text{y} \ F_3 = \frac{2}{9}$$

b) Nuevo punto de apoyo en P_1 :

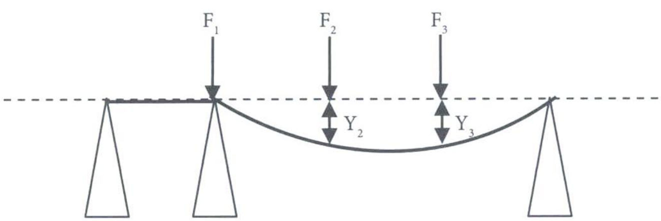


Figura 2.5

Desaparece el aporte de los coeficientes de influencia para F1.

Su forma escalonada es:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8\ 3 & 5\ 6 & 3 \\ 0 & 4\ 3 & 8\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Los nuevos desplazamientos son:

$y_2=3$, $y_3=2$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Resuelva los siguientes sistemas por el método de Cramer.

a)
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 9 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 5 \\ x_1 - 6x_2 - 5x_3 &= -9 \end{aligned}$$

Respuesta: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 2$

b)
$$\begin{aligned} 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Respuesta: $x_1=-3t+1$, $x_2=4t-1$, $x_3=t$

2. Resuelva los siguientes sistemas por el método de eliminación de Gauss.

a)
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 9 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 5 \\ x_1 - 6x_2 - 5x_3 &= -9 \end{aligned}$$

Respuesta: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 2$

b)
$$\begin{aligned} 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Respuesta: $x_1=-3t+1$, $x_2=4t-1$, $x_3=t$

3. Resuelva los siguientes sistemas por el método de eliminación de Gauss-Jordan.

a)
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 9 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 5 \\ x_1 - 6x_2 - 5x_3 &= -9 \end{aligned}$$

Respuesta: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 2$

b)
$$\begin{aligned} 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Respuesta: $x_1=-3t+1$, $x_2=4t-1$, $x_3=t$

4. Resuelva los siguientes sistemas por el método de la inversa de la matriz de coeficientes.

c)
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 9 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 5 \\ x_1 - 6x_2 - 5x_3 &= -9 \end{aligned}$$

Respuesta: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 2$

d)
$$\begin{aligned} 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Respuesta: $x_1=-3t+1$, $x_2=4t-1$, $x_3=t$

5. Halle el conjunto solución de los siguientes sistemas homogéneos por el método de eliminación de Gauss-Jordan

a) $\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ -2x + 5y + 2z &= 0 \\ -7x + 7y + z &= 0 \end{aligned}$

Respuesta: $x = {-16}/{3}$, $y = {-9}/{2}$, $z = {7}/{6}$

b) $\begin{aligned} 2x + y + 3z &= 0 \\ x + 2y &= 0 \\ y + z &= 0 \end{aligned}$

Respuesta: $x = -\dfrac{16t}{3}$, $y = -\dfrac{4t}{7}$, $z = t$

6. Halle el conjunto solución de los siguientes sistemas homogéneos por el método de eliminación de Gauss.

a) $\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ -2x + 5y + 2z &= 0 \\ -7x + 7y + z &= 0 \end{aligned}$

Respuesta: $x = {-16}/{3}$, $y = {-9}/{2}$, $z = {7}/{6}$

b) $\begin{aligned} 2x + y + 3z &= 0 \\ x + 2y &= 0 \\ y + z &= 0 \end{aligned}$

Respuesta: $x = -\dfrac{16t}{3}$, $y = -\dfrac{4t}{7}$, $z = t$

7. En un test de 30 preguntas se obtiene 0,75 puntos por cada respuesta correcta y se restan 0,25 puntos por cada error. Si la nota ha sido de 10,5 ¿Cuántos aciertos y cuántos errores se han tenido?

Respuesta: 18 aciertos y 12 errores

8. Halle la solución del sistema dado por la siguiente matriz aumentada.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

Respuesta: $X = \begin{bmatrix} 3-2t \\ -4+t \\ 2-5t \\ t \end{bmatrix}$

9. Resuelva el siguiente sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 &= 6 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 &= 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 5x_4 &= 10 \end{aligned}$$

Respuesta: $X = \begin{bmatrix} 10+11t \\ -2-4t \\ t \\ 0 \end{bmatrix}$

10. Resuelva el siguiente sistema

$$\begin{aligned} x1 - 2x2 + x3 - 4x4 &= 1 \\ x1 + 3x2 + 7x3 + 2x4 &= 2 \\ x1 - 12x2 - 11x3 - 16x4 &= 5 \end{aligned}$$

Respuesta: El sistema es inconsistente, no tiene solución.

11. Una planta industrial cuenta con 3 máquinas P, Q y R que en un día trabajan 15, 22 y 23 horas respectivamente. Con estas máquinas la planta produce los artículos x_1, x_2 y x_3 de la siguiente manera: una unidad de x_1 está en P durante 1 hora, en Q durante 2 horas y en R durante 1 hora. Una unidad de x_2 está en P durante 2 horas, en Q 2 horas y en R 3 horas. Una unidad de x_3 está en P 1 hora, en Q 2 horas y en R 2 horas. Si las máquinas se explotan a máxima capacidad durante un día, halle el número de unidades de cada artículo que es posible producir.

Respuesta: $X = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$

12. Para determinar el grado alcohólico de un vino se procede a su destilación obteniéndose una mezcla hidroalcohólica. Mediante un refractómetro se lee indirectamente el porcentaje de alcohol en la mezcla (ml etanol/100 ml mezcla), obteniéndose los siguientes valores en función de la temperatura de trabajo (BRU).

Temp \C	18	19	21	22	23
Grado Alcohólico	11.51	11.71	12.12	12.32	12.54

a) Halle el polinomio de interpolación de estos datos.
b) Estime el grado alcohólico del vino (generalmente se da a 20°C).

Respuesta:

a) $p(x) = 132.968 - 24.6442x + 1.84625x^2 - 0.06083x^3 + 0.00075x^4$
b) El grado alcohólico es $p(20) = 11.92$ ml etanol/100 ml mezcla.

13. Aplique la regla de Cramer para despejar x' e y' en términos de x e y.

$$x = \frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y'$$

$$y = \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y'$$

Respuesta: $x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y$

$y' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y$

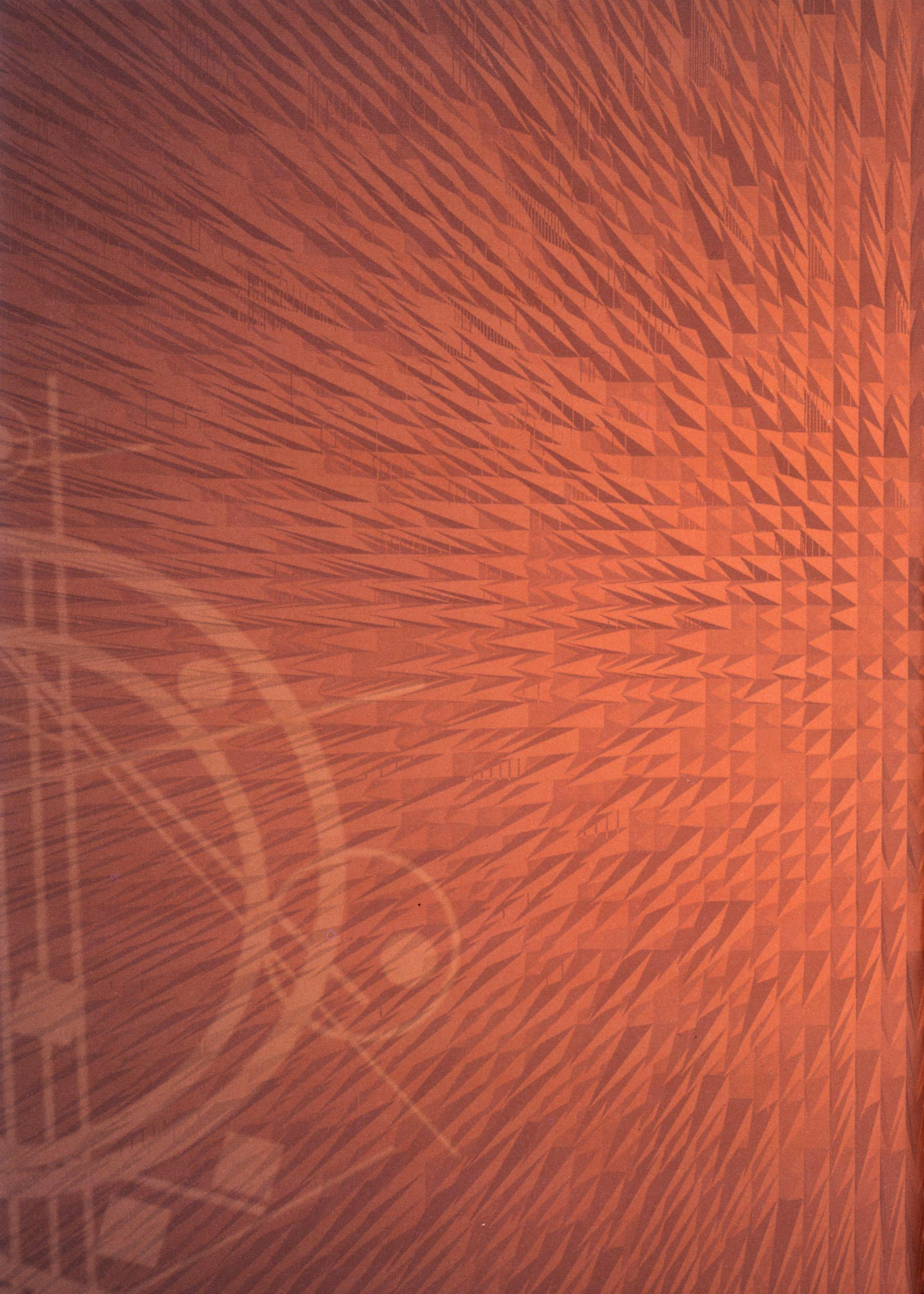
14. Aplique la eliminación de Gauss-Jordan para despejar x' e y' en términos de x e y.

$$x = x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta$$
$$y = x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta$$

Respuesta: $x' = x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta$

$y' = -x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta$

¿Sabías que Américo Vespucio fue quien calculó usando la luna y marte como referencia que América era un nuevo continente. Fue el alemán Martín Waldseemüller quien en 1538 imprimió los primeros mapas mundiales y en honor de Vespucio le dio el nombre de América a esta parte del mundo?



III Unidad Didáctica

Vectores en R^2, R^3 y R^n

Introducción

En ciencia e ingeniería, las cantidades como longitud, área, volumen, capacidad, masa, grado alcohólico, tráfico, producción, utilidad, etcétera, se definen completamente una vez que se escribe un número real que representa la magnitud de la misma. En determinadas ciencias se les denomina cantidades escalares. Otras cantidades que especifican una magnitud y una dirección, son denominadas cantidades vectoriales. Por ejemplo, fuerza, desplazamiento, velocidad, aceleración, torque, campo eléctrico, campo magnético, etc.

Aunque parezca contradictorio, las matrices de naturaleza aparentemente algebraica, serán aplicadas a los vectores y espacios vectoriales. Por ejemplo, una matriz fila 1x2 se puede manejar como un vector de dos componentes y representarlo en el plano cartesiano. Una matriz fila 1x3 se puede manejar como un vector de tres componentes y representarlo en el espacio cartesiano.

De manera que el tema de este capítulo tiene una naturaleza predominantemente geométrica pero utiliza las matrices y determinantes. Y los números reales se utilizan muchísimo como componentes de los vectores.

Sin embargo, más adelante se utilizarán funciones matemáticas, matrices y números complejos como componentes de dichos vectores.

3.Vectores

3.1 Definición de vector

Un vector es un segmento rectilíneo dirigido; constituye el objeto de estudio del análisis vectorial. Se considera que un segmento rectilíneo dirigido va desde un punto inicial P a un punto terminal Q.

Figura 3.1

Por convención, todo vector tiene su punto inicial en algún punto de referencia fijo. Por ejemplo, el origen de un sistema de coordenadas.

Figura 3.2

Por esto, un vector se puede definir analíticamente en términos de números reales, los cuales permiten estudiar el análisis vectorial desde un punto de vista puramente analítico.

3.2 Notación de un vector

Un vector se denota por una pequeña flecha sobre dos letras mayúsculas o por una letra en tipo negrita.

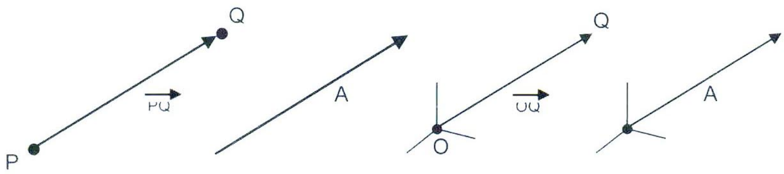


Figura 3.3

3.3. Vectores en R^2

3.3.1. Definición de vector en R^2

Un vector en R^2 es un vector en un plano o espacio de dos dimensiones. Está definido por un par ordenado de números reales x_1 y x_2. Dicho par se puede escribir como $(x_1; x_2)$ o como $[x_1 \ \ x_2]$. Los números 'x_1' y 'x_2' se llaman componentes del vector en el espacio R^2.

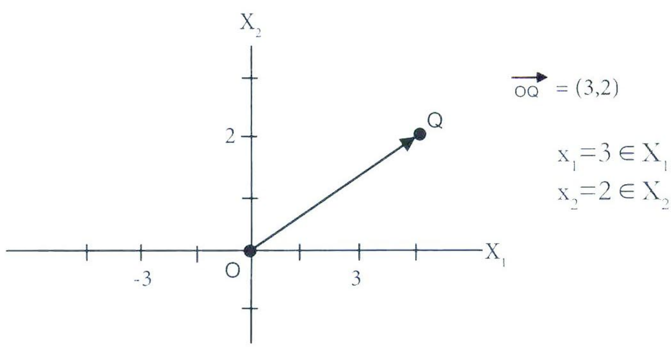


Figura 3.4

A los ejes 'X_1' y 'X_2' se les conoce también como los ejes cartesianos X e Y respectivamente.

3.3.2. Igualdad de vectores en R^2

Los vectores **A** $=(a_1, a_2)$ y **B** $=(b_1, b_2)$ son iguales entre sí cuando se cumple que $a_i = b_i$ para i = 1, 2.

Ejemplo 1:

Halle las componentes de **A**, para que **A** $=(a_1, a_2)$ y **B** $=(1; 5)$ sean dos vectores iguales.

A=B
$(a_1, a_2)=(1; 5)$
Luego, $a_1=1$ y $a_2=5$.

3.3.3. Norma de un vector en R^2

La norma o magnitud de un vector **A** $=(a_1, a_2)$ es un escalar que mide su longitud. Se denota por $||\mathbf{A}||$ y se calcula con la siguiente relación pitagórica:

$$||\mathbf{A}|| = \quad a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2}$$

Ejemplo 2:

Sea el vector **A** = (3, 4)

Entonces,
La norma de **A** es:

$$||\mathbf{A}|| = \quad 3^2 + 4^2 \ = 5$$

3.3.4. Dirección de un vector en R^2

La dirección de un vector $(a_1; a_2)$ es la trayectoria axial que contiene al mismo y está definida por el ángulo en sentido anti horario que forma el vector con respecto al semieje positivo x_1.

La interpretación geométrica de la dirección de un vector en R^2 se presenta a continuación:

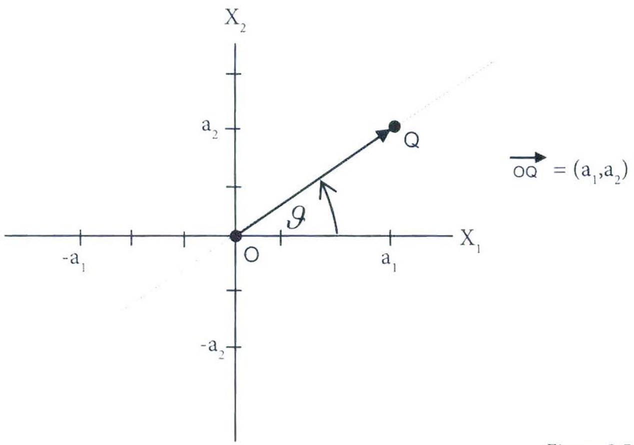


Figura 3.5

Analíticamente, $\vartheta = \tan^{-1}\left(\frac{a_2}{a_1}\right)$

Ejemplo 3:

Halle la dirección del vector $(a_1; a_2)$. Se sabe que $a_2=a_1$

Analíticamente,

$$\vartheta = \tan^{-1}\left(\frac{a_2}{a_1}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{a_1}{a_1}\right)$$

$= \tan^{-1}(1)$

$= \dfrac{\pi}{4}$ radianes

$= 45°$

3.3.5. Los dos vectores canónicos en R^2

Los vectores canónicos en R^2, llamados también vectores coordenados unitarios, son aquellos vectores de norma unidad que se ubican en los ejes cartesianos: $\mathbf{i} = (1; 0)$ en el eje x_1 y $\mathbf{j} = (0; 1)$ en el eje x_2.

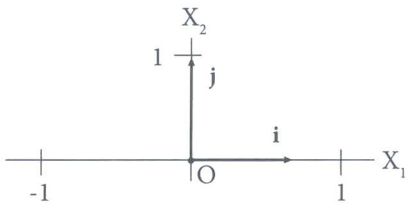
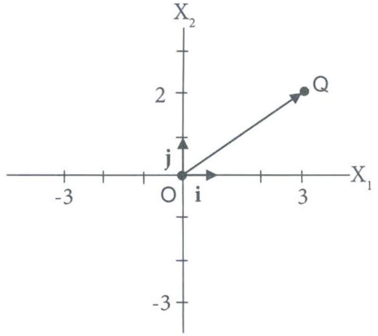


Figura 3.6

Por eso, un vector cualquiera en R^2 se puede expresar como una combinación lineal de los vectores canónicos.

Ejemplo 4:



$\overrightarrow{OQ} = (3, 2) = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

Figura 3.7

Ejemplo 5:

Exprese el vector **A**= (a_1, a_2) usando vectores canónicos.

Desdoblando $(a_1; a_2)$ en cada eje cartesiano:
$(a_1; a_2) = (a_1; 0) + (0; a_2)$

Factorizando cada par:
$(a_1; a_2) = a_1\ (1; 0)\ +\ a_2\ (0; 1)$

Reemplazando **i** y **j**:
$(a_1; a_2) = a_1\mathbf{i}\ +\ a_2\mathbf{j}$

3.3.6. Vector unitario en R²

Un vector unitario en R² es aquel vector de norma unidad que tiene la misma dirección y sentido que un determinado vector en el plano cartesiano.

Si el vector $\mathbf{A} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$, entonces, el vector unitario **U** que tiene la misma dirección que **A** está dado por:

$$\mathbf{U} = \frac{a_1}{|\,A\,|}\ \mathbf{i} + \frac{a_1}{|\,A\,|}\ \mathbf{j}$$

Ejemplo 6:

Sea el vector **A** = 3**i** + 4**j**.

Su norma es $||A|| = \ 3^2 + 4^2 = 5$.

Luego, el vector unitario de **A** es:

$$\mathbf{U} = \frac{3}{5}\,\mathbf{i} + \frac{4}{5}\,\mathbf{j}$$

Se verifica que la norma de **U** es 1.

3.3.7. Operaciones con vectores en R^2

3.3.7.1. Multiplicación de un escalar por un vector en R^2

Sea un escalar 'r' que pertenece a los números reales y un vector $\mathbf{A}=(a_1;\ a_2)$, la multiplicación del escalar por el vector está definida cuando $r\mathbf{A}= (ra_1;\ ra_2)$ o $r\mathbf{A}= ra_1\mathbf{i} + ra_2\mathbf{j}$.

Ejemplo 7:

Sea el vector $\mathbf{A}=(3;4)$.

Entonces:
$7\mathbf{A}=(7x3;\ 7x4) = (21\ ;\ 28)$ ó $7\mathbf{A}=7x3\mathbf{i} + 7x4\mathbf{j} = 21\mathbf{i} + 28\mathbf{j}$

3.3.7.2. Opuesto de un vector en R^2

El opuesto de un vector en R^2 es aquel vector que tiene la misma dirección pero en sentido opuesto.

Sea el vector $\mathbf{A} = (a_1;a_2)$, entonces, el opuesto de **A** es $-\mathbf{A}$. Es decir, el opuesto de $(a_1;a_2)$ es $(-a_1;-a_2)$.

Ejemplo 8:

Sea el vector $\mathbf{A}=(3;4)$.

Entonces:
El opuesto de **A** es (-1)**A**.

(-1)**A**=(-1x3; -1x4) = (-3 ; -4) ó (-1)**A**=-1x3**i** + -1x4**j** = -3**i** - 4**j**

3.3.7.3. Adición de vectores en R^2

Sean los vectores **A**=(a_1;a_2) y **B**=(b_1;b_2), la adición de **A** y **B** está definida por **A**+**B**=(a_1+b_1 ; a_2+b_2) o **A**+**B**= (a_1+b_1)**i** + (a_2+b_2)**j**.

Ejemplo 9:

Halle **A+B** si **A**=(3;4) y **B**=(5;7)

Entonces:
A+**B**=(3+5 ; 4+7) = (8 ; 11) ó **A**+**B**=(3+5)**i** + (4+7)**j**=8**i** + 11**j**

3.3.7.4. Sustracción de vectores en R^2

Sean los vectores **A**=(a_1;a_2) y **B**=(b_1;b_2), la sustracción de **A** y **B** está definida por **A**-**B**=(a_1-b_1 ; a_2-b_2) o **A**+**B**= (a_1-b_1)i + (a_2-b_2)j.

Ejemplo 10:

Halle **A-B** si **A**=(3;4) y **B**=(5;7)

Entonces:
A+**B**=(3-5 ; 4-7) = (-2 ; -3) ó **A**+**B**=(3-5)**i** + (4-7)**j** = -2**i** - 3**j**

3.3.7.5. Producto escalar de dos vectores en R^2

El producto escalar de dos vectores **A**=(a_1;a_2) y **B**=(b_1;b_2) en R^2 se denota por **A.B**, es un escalar que está definido por **A.B** = a_1b_1 + a_2b_2.

Ejemplo 11:

Halle **A.B** si **A**=(3;4) y **B**=(5;7)

Entonces:
El producto escalar es **A.B** = (3)(5) + (4)(7) = 43

3.3.7.6. Ángulo entre dos vectores en R^2

El ángulo entre dos vectores **A**=(a_1;a_2) y **B**=(b_1;b_2) en R^2, es aquel ángulo ‘ ϑ ’ de medida positiva entre un vector y el otro. Se cumple que $0 \leq \vartheta \leq \pi$.

El ángulo entre **A** y **B** está definido por

$$\vartheta = \cos\text{-}1 \left[\frac{A.B}{|A|.|B|} \right]$$

Ejemplo 12:

Sean los vectores **A**=(2;-1) y **B**=(1;-3).

Entonces:
El ángulo de **A** a **B** se halla de la siguiente manera:

Producto escalar, **A.B** = (2)(1) + (-1)(-3) = 5

Norma de A, $||A|| = \sqrt{5}$

Norma de B, $||B|| = \sqrt{10}$

El ángulo entre **A** y **B** es:

$$\vartheta = \cos\text{-}1 \left[\frac{5}{5\ \ 2} \right] = \cos\text{-}1 \left[\frac{1}{2} \right] = \frac{\pi}{4} \text{ radianes} = 45°$$

3.3.7.7. Vectores paralelos en R^2

Los vectores **A** y **B** en R^2 son paralelos si se cumplen las siguientes condiciones:

i) **B** = r**A**,

ii) $\vartheta = 0$, cuando tienen la misma dirección y sentido, ó

iii) $\vartheta =$, π cuando tienen la misma dirección pero sentidos opuestos.

Ejemplo 13:

Verifique si son paralelos los vectores **A**=3**i**+7**j** y **B**=21**i**+28**j**.

Factorizando los componentes de **B**

B = 21**i** + 28**j** = 7x3**i** + 7x4**j** = 7(3**i**+4**j**) = 7**A**

Entonces, **B** y **A** son paralelos y del mismo sentido.

Ejemplo 14:

Verifique si son paralelos los vectores **A**=3**i** + 4**j** y **B**=-3**i** - 4**j**

Entonces:
Factorizando los componentes de **B**

B= -(3**i** + 4**j**) = - **A**.

Entonces, **B** y **A** son paralelos pero de sentidos opuestos.

3.3.7.8. Vectores ortogonales en R^2

Los vectores **A** y **B** en R^2 son ortogonales si se cumplen las siguientes condiciones:

i) **A.B** = 0, o

ii) $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, cuando el ángulo entre ellos es $\frac{\pi}{2}$ radianes.

Ejemplo 15:

Verifique si son ortogonales los vectores **A**=3**i** + 4**j** y **B**=-8**i** + 6**j**

Entonces:
Su producto escalar es **A.B** = (3)(-8) + (4)(6) = 0

Entonces, **A** y **B** son ortogonales.

Ejemplo 16:

Verifique si son ortogonales los vectores **A**=3**i** + 4**j** y **B**=-4**i** + 3**j**

Entonces:

||A||=5 y ||B||=5

$$\vartheta = \cos^{-1}\left[\frac{A.B}{|A|.|B|}\right] = \cos^{-1}\left[\frac{0}{25}\right] = \cos^{-1}[0] = \frac{\pi}{2} \text{ radianes} = 90°$$

Entonces, **A** y **B** son ortogonales.

3.3.7.9. Proyección de un vector sobre otro en R^2

La proyección de un vector **A** sobre otro **B** es aquella proyección de A en la dirección de B. Se denota por Proy_B^A.

La proyección de A en la dirección de B está definida por:

$$\mathrm{Proy}_B^A = \underbrace{\left(\frac{A.B}{|B|}\right)}_{\text{Componente de la proyección}}\underbrace{\left(\frac{B}{\|B\|}\right)}_{\text{Vector unitario de B}}$$

Ejemplo 17:

Halle la proyección de **A** sobre **B** si **A**=(2;-1) y **B**=(1;-3)

Entonces

A.B= 5

$||B|| = \sqrt{10}$

La proyección de **A** en la dirección de **B** es:

$$\mathrm{Proy}_B^A = \left(\frac{5}{\sqrt{10}}\right)\left(\frac{1;-3}{\sqrt{10}}\right) = \frac{1}{2}(1;-3) = \frac{1}{2}(1\mathbf{i} - 3\mathbf{j}) = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j}$$

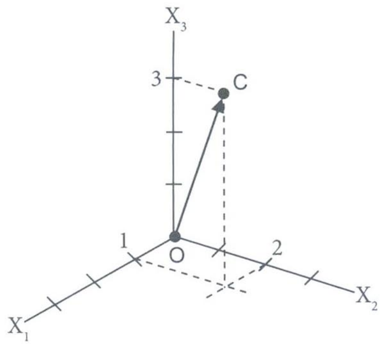
3.4. Vectores en R^3

3.4.1. Definición de vector en R^3

Un vector en R^3 es un vector en un espacio de tres dimensiones. Está definido por una terna ordenada de números reales x_1, x_2 y x_3.

Dicha terna se puede escribir como $(x_1; x_2; x_3)$ o como $[x_1\ x_2\ x_3]$. Los números 'x_1' 'x_2' y 'x_3' se llaman componentes del vector en el espacio R^3.

A continuación, se tiene una representación geométrica del vector $\overrightarrow{OQ}$ en el espacio R^3.



$\overrightarrow{OQ} = (1; 2; 3)$

$x_1 = 1 \in X_1$
$x_2 = 2 \in X_2$
$x_3 = 3 \in X_3$

Figura 3.8

A los ejes 'X_1', 'X_2' y 'X_3' se les conoce también como los ejes cartesianos X, Y y Z respectivamente.

3.4.2. Igualdad de vectores en R^3

Los vectores $\mathbf{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\mathbf{B} = (b_1, b_2, b_3)$ son iguales entre sí cuando se cumple que $a_i = b_i$ para i=1, 2, 3.

Ejemplo 18:

Verifique si son iguales los vectores $\mathbf{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\mathbf{B} = (1; 5; 7)$

Entonces:

$(a_1, a_2, a_3) = (1; 5; 7)$

Luego, $a_1 = 1$ y $a_2 = 5$ y $a_3 = 7$

3.4.3. Norma de un vector en R^3

La norma de un vector **A** (a_1, a_2, a_3) es un escalar que mide su longitud. Se denota por $||\mathbf{A}||$ y se calcula con la siguiente relación pitagórica:

$$||\mathbf{A}|| = \quad a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + a_3^{\ 2}$$

Ejemplo 19:

Sea el vector $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \sqrt{11}\mathbf{k} = (3; 4; \sqrt{11})$

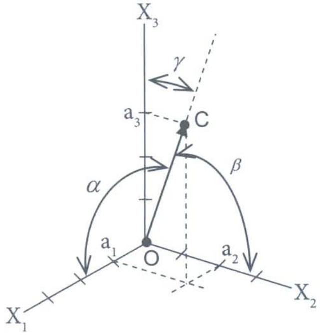
Entonces:

La norma de **A** es:

$$||\mathbf{A}|| = \quad 3^2 + 4^2 + \ \mathbf{1}^{\ 2} = 6$$

3.4.4. Dirección de un vector en R^3

La dirección de un vector $\mathbf{A}=(a_1; a_2; a_3)$ está definida por tres ángulos, formados por el vector **A** con cada uno de los ejes coordenados. Dichos ángulos se conocen como ángulos directores del vector **A**. La interpretación geométrica de la dirección de un vector en R^3 se presenta a continuación:



$\overrightarrow{OQ} = \mathbf{A} = (a_1; a_2; a_3)$

Figura 3.9

Analíticamente,

$$\text{Cos}\,\alpha = \frac{a_1}{\| A \|} \qquad \text{Cos}\,\beta = \frac{a_2}{\| A \|} \qquad \text{Cos}\,\gamma = \frac{a_3}{\| A \|}$$

Ejemplo 20:

Halle los cosenos directores del vector **A** = (3; 2; 6)

Entonces

$||A|| = 7$

$$\text{Cos}\,\alpha = \frac{3}{7} \qquad \text{Cos}\,\beta = \frac{2}{7} \qquad \text{Cos}\,\gamma = \frac{6}{7}$$

3.4.5. Los tres vectores canónicos en R^3

Los vectores canónicos en R^3, llamados también vectores coordenados unitarios, son aquellos vectores de norma unidad que se ubican en los ejes cartesianos: **i** = (1; 0; 0) en el eje x_1, **j** = (0; 1; 0) en el eje x_2, **k** = (0; 0; 1) en el eje x_3.

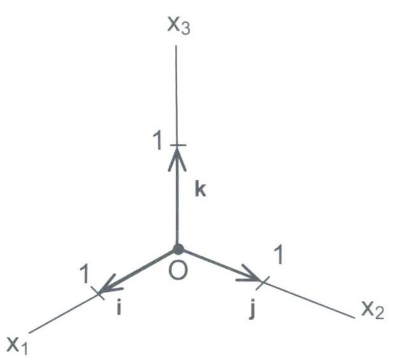
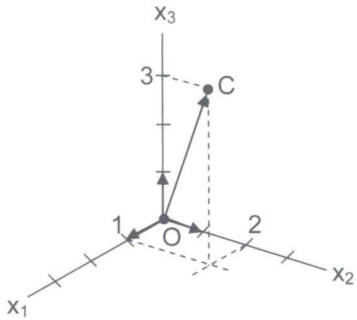


Figura 3.10

Por eso, un vector cualquiera en R^3 se puede expresar como una combinación lineal de los vectores canónicos **i**, **j** y **k**.

Ejemplo 21:



$\overrightarrow{OC} = \mathbf{A} = (1; 2; 3) = 1\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

Figura 3.11

Ejemplo 22:

Exprese el vector **A** $(a_1; a_2; a_3)$ usando vectores canónicos

Entonces

Desdoblando $(a_1; a_2; a_3)$ en cada eje cartesiano:
$(a_1; a_2; a_3) = (a_1; 0; 0) + (0; a_2; 0) + (0; 0; a_3)$

Factorizando cada par:
$(a_1; a_2; a_3) = a_1 (1; 0; 0) + a_2 (0; 1; 0) + a_3 (0; 0; 1)$

Reemplazando **i** , **j** y **k**:
$(a_1; a_2; a_3) = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$

3.4.6. Vector unitario en R^3

Un vector unitario en R^3 es aquel vector de norma unidad que tiene la misma dirección y sentido que un determinado vector en el espacio R^3.

Si el vector $\mathbf{A} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$; entonces, el vector unitario $\mathbf{U}$ que tiene la misma dirección que $\mathbf{A}$ está dado por:

$$\mathbf{U} = \frac{a_1}{|A|}\mathbf{i} + \frac{a_2}{|A|}\mathbf{j} + \frac{a_3}{|A|}\mathbf{k}$$

Ejemplo 23:

Halle el vector unitario de $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$.

Entonces:

Su norma es $||A|| = 3^2 + 2^2 + 6^2 = 7$.

Luego, el vector unitario de $\mathbf{A}$ es:

$$\mathbf{U} = \frac{3}{7}\mathbf{i} + \frac{2}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k}$$

Se verifica que la norma de $\mathbf{U}$ es 1.

3.4.7. Operaciones con vectores en R^3

3.4.7.1. Multiplicación de un escalar por un vector en R^3

Sea un escalar 'r' que pertenece a los reales y un vector $\mathbf{A}=(a_1; a_2; a_3)$, la multiplicación del escalar por el vector está definida cuando $r\mathbf{A}= (ra_1; ra_2; ra_3)$ o $r\mathbf{A}= ra_1\mathbf{i} + ra_2\mathbf{j} + ra_3\mathbf{k}$

Ejemplo 24:

Halle 7**A** si **A**=(=(3; 4; 1)

Entonces:

7**A**=(7x3; 7x4; 7x1) = (21 ; 28; 7) ó
7**A**=7x3**i** + 7x4**j** + 7x1**j** = 21**i** + 28**j**+ 7**j**

3.4.7.2. Opuesto de un vector en R^3

El opuesto de un vector en R^3 es aquel vector que tiene la misma dirección pero en sentido opuesto.

Sea el vector **A** = **A**=(a_1; a_2; a_3), entonces, el opuesto de **A** es –**A**. Es decir, el opuesto de (a_1;a_2) es (-a_1; -a_2; -a_3).

Ejemplo 25:

Halle el opuesto de **A**=(3;4;1)

Entonces:

El opuesto de **A** es

-**A** = (-3; -4; -1) ó
-**A** = -3i - 4j – **k**

3.4.7.3. Adición de vectores en R^3

Sean los vectores **A**=(a_1; a_2; a_3) y **B**=(b_1; b_2; b_3), la adición de **A** y **B** está definida por:

A+**B**=(a_1+b_1 ; a_2+b_2; a_3+b_3) ó **A**+**B**= (a_1+b_1)**i** + (a_2+b_2)**j** + (a_3+b_3)**k**

Ejemplo 26:

Halle **A+B** si **A**=(3; 4; 1) y **B**=(5; 7; 2)

Entonces:

A+**B**=(3+5 ; 4+7; 1+2) = (8 ; 11; 3) ó
A+**B**=(3+5)**i** + (4+7)**j**+ (1+2)**k** =8**i** + 11**j** + 3**k**

3.4.7.4. Sustracción de vectores en R^3

Sean los vectores **A**=(a_1; a_2; a_3) y **B**=(b_1; b_2; b_3), la sustracción de **A** y **B** está definida por:

A+**B**=(a_1+b_1 ; a_2+b_2; a_3+b_3) ó
A+**B**= (a_1+b_1)**i** + (a_2+b_2)**j** + (a_3+b_3)**k**

Ejemplo 27:

Halle **A-B** si **A**=(3; 4; 1) y **B**=(5; 7; 2)

Entonces:

A-**B**=(3-5 ; 4-7; 1-2) = (-2 ; -3; -1) ó
A+**B**=(3-5)**i** + (4-7)**j**+ (1-2)**k** = -2**i** - 3**j** - **k**

3.4.7.5. Producto escalar de dos vectores en R^3

El producto escalar de dos vectores **A**=(a_1; a_2; a_3) y **B**=(b_1; b_2; b_3), en R^3 se denota por **A.B**, es un escalar que está definido por **A.B** = $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

Ejemplo 28:

Halle el producto escalar de **A**=(3;4) y **B**=(5;7)

Entonces:

El producto escalar es **A.B** = (3)(5) + (4)(7) = 43

3.4.7.6. Producto vectorial de dos vectores en R^3

El producto vectorial de dos vectores **A**=(a_1; a_2; a_3) y **B**=(b_1; b_2; b_3) se denota por **AxB** y está definido por:

$$\mathbf{AxB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{AxB} = (a_2b_3\text{-}b_3a_2;\ a_3b_1\text{-}b_1a_3;\ a_1b_2\text{-}b_2a_1)$$

Ejemplo 29:

Halle el producto vectorial de **A**=(3; 4; 1) y **B**=(5; 7; 0)

Entonces, el producto vectorial es:

$$\mathbf{AxB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 7 & 0 \end{vmatrix}$$

3.4.7.7. Ángulo entre dos vectores en R^3

El ángulo entre dos vectores **A**=(a_1; a_2; a_3) y **B**=(b_1; b_2; b_3) en R^3, es aquel ángulo 'ϑ' de medida positiva de un vector al otro. Se cumple que $0 \leq \vartheta \leq \pi$.

El ángulo de **A** a **B** está definido por:

$$\vartheta = \cos^{-1} \left[\frac{A.B}{|A|.|B|} \right]$$

Ejemplo 30:

Halle el ángulo entre los vectores **A**=(2;-1; 2) y **B**=(1;-3; 0) .

Entonces:

El ángulo de **A** a **B** se halla de la siguiente manera:

Producto escalar, **A.B** = (2)(1) + (-1)(-3) + (2)(0) = 5

Norma de A, $||A|| = 5$

Norma de B, $||B|| = \sqrt{10}$

El ángulo de **A** a **B** es:

$$\vartheta = \cos^{-1} \left[\frac{5}{5\ 2} \right] = \cos^{-1} \left[\frac{1}{2} \right] = \frac{\pi}{4} \text{ radianes} = 45°$$

3.4.7.8. Vectores paralelos en R^3

Los vectores **A** y **B** en R^3 son paralelos si se cumplen las siguientes condiciones:

i) **B** = r**A**,

ii) $\vartheta = 0$, cuando tienen la misma dirección y sentido, o

iii) $\vartheta = \pi$, cuando tienen la misma dirección pero sentidos opuestos

Ejemplo 31:

Verifique si son paralelos **A**=3**i**+7**j**+9**k** y **B**=21**i**+49**j**+63**k**.

Entonces:

Factorizando los componentes de **B**

B=21**i**+49**j**+63**k** = 7x3**i** + 7x4**j** + 7x9**k** = 7(3**i**+4**j**+9**k**) = 7**A**

Entonces, **B** y **A** son paralelos y del mismo sentido.

Ejemplo 32:

Verifique si son paralelos **A**=3**i** + 4**j** + 5**k** y **B**=-3**i** - 4**j** - 5**k**.

Entonces:

Factorizando los componentes de **B**, **B**= -(3**i** + 4**j** + 5**k**) = - **A**.

Entonces, **B** y **A** son paralelos pero de sentidos opuestos.

3.4.7.9. Vectores ortogonales en R^3

Los vectores **A** y **B** en R^2 son ortogonales si se cumplen las siguientes condiciones:

i) A.**B** = 0, o

ii) $\vartheta = \dfrac{\pi}{2}$, cuando el ángulo entre ellos es $\dfrac{\pi}{2}$ radianes.

Ejemplo 33:

Verifique si son ortogonales los vectores **A**=3**i** + 4**j** + 5**k** y **B**=-8**i** + 6**j** + 0**k**.

Entonces:

Su producto escalar es **A.B** = (3)(-8) + (4)(6) + (5)(0) = 0.

Entonces, **A** y **B** son ortogonales.

Ejemplo 34:

Sean **A**=3**i** + 4**j** + 5**k** y **B**=-4**i** + 3**j** + 0**k**|

$||A|| = \sqrt{30}$ y $||B|| = 5$

$$\vartheta = \cos^{-1}\left[\frac{A.B}{|A|.|B|}\right] = \cos^{-1}\left[\frac{0}{5\sqrt{30}}\right] = \cos^{-1}[0] = \frac{\pi}{2} \text{ radianes} = 90°$$

Entonces, **A** y **B** son ortogonales.

3.4.7.10. Proyección de un vector sobre otro en R^3

La proyección de un vector **A** sobre otro **B** es aquella proyección de A en la dirección de **B**. Se denota por Proy_B^A.

La proyección de **A** en la dirección de **B** está definida por:

$$\text{Proy}_B^A = \underbrace{\left(\frac{A.B}{|B|}\right)}_{\text{Componente de la proyección}} \underbrace{\left(\frac{B}{\|B|}\right)}_{\text{Vector unitario de B}}$$

Ejemplo 35:

Halle la proyección de **A** sobre **B** si **A**=(2; 1; 1) y **B**=(1; 3; 0)

Entonces:

A.B=5

$||B||=\sqrt{10}$

La proyección de **A** en la dirección de **B** es:

$$\begin{aligned}
\text{Proy}_B^A &= \left(\frac{5}{\sqrt{10}}\right)\left(\frac{(1;3;0)}{\sqrt{10}}\right) \\
&= \frac{1}{2}(1; 3; 0) \\
&= \frac{1}{2}(1\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 0\mathbf{k}) \\
&= \frac{1}{2}\,\mathbf{i} - \frac{3}{2}\,\mathbf{j} + 0\mathbf{k}
\end{aligned}$$

3.5. Vectores en R^n

3.5.1. Definición de vector en R^n

Un vector en un espacio de 'n' dimensiones es un arreglo ordenado de 'n' números reales. Dicho arreglo se puede escribir como $(x_1, x_2, x_3,\ldots, x_n)$ o también $[x_1\ \ x_2\ \ x_3\ \ \ldots\ \ x_n]$. Los números '$x_1$', '$x_2$', '$x_3$',..., '$x_n$' se llaman componentes del vector en el espacio ene-dimensional R^n.

Cabe resaltar que el esfuerzo que se despliegue en la representación geométrica de un espacio de más de tres dimensiones no justifica la enorme demora que se invierta en el intento, por lo que se recomienda efectuar el estudio de los vectores de 'n' componentes desde un punto de vista puramente analítico.

3.5.2. Igualdad de vectores en R^n

Los vectores **A**=(a_1, a_2, a_3,…, a_n) y **B**=(b_1, b_2, b_3,…, b_n) son iguales entre sí cuando se cumple que $a_i = b_i$ para i=1, 2,…, n.

Ejemplo 36:

Verifique si son iguales los vectores

A =(a_1, a_2, a_3; a_4) y **B** =(1; 5; 7; 9)

Entonces:

(a_1, a_2, a_3; a_4) = (1; 5; 7; 9)

Luego, a_1=1 y a_2=5 y a_3=7 y a_4=9

3.5.3. Norma de un vector en R^n

La norma de un vector **A** (a_1, a_2, a_3,…, a_n) es un escalar que mide su longitud. Se denota por ||**A**|| y se calcula con la siguiente relación pitagórica:

$$||\mathbf{A}|| = a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + a_3^{\,2} + \ldots + a_n^{\,2}$$

Ejemplo 37:

Halle la norma de **A** = (3; 4; 1 ; 1)

Entonces:

La norma de **A** es:

$$||\mathbf{A}|| = \quad 3^2 + 4^2 + \quad 1^{\ 2} + 1^2 \quad = 6.08$$

3.5.4. Los 'n' vectores canónicos de R^n

Los vectores canónicos de R^n se conocen como vectores coordenados unitarios de R^n. Los vectores coordenados unitarios son aquellos vectores de la forma $\mathbf{e}_r = (0, 0,\ldots,1, 0,..,0)$ con la r-ésima componente 1, y ceros en los otros lugares. Cada vector de R^n se puede expresar de manera única como la suma de múltiplos de los vectores coordenados unitarios $\mathbf{e}_i$. Por ejemplo: sea **W** un vector de R^n; entonces, $\mathbf{W}=w_1\mathbf{e}_1 + w_2\mathbf{e}_2 +\ldots + wn\mathbf{e}_n$

Ejemplo 38:

Exprese el vector **A** = (3; 5; 7; 9) usando vectores canónicos.

Entonces:

Desdoblando (3; 5; 7; 9)
(3; 5; 7; 9) = (3; 0; 0; 0) + (0; 5; 0; 0) + (0; 0; 7; 0) + (0; 0; 0; 9)

Factorizando cada 4-tupla:
(3; 5; 7; 9) = 3(1; 0; 0; 0) + 5(0; 1; 0; 0) + 7(0; 0; 1; 0) + 9(0; 0; 0; 1)
(3; 5; 7; 9) = $3\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2 + 7\mathbf{e}_3 + 9\mathbf{e}_4$

3.5.5. Vector unitario en R^n

Un vector unitario de R^n es un vector de norma 1, que tiene la misma dirección que un determinado vector de R^n. Dado cualquier vector **W** de R^n, un vector unitario con la misma dirección que **W** está dado por $\dfrac{1}{|W|}$ **W**.

Ejemplo 39:

Halle el vector unitario de **A** = (3; 5; 7; 9)
Entonces:

Su norma es ||**A**|| = $\sqrt{3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2} = 12.8$

Luego, el vector unitario de A es:

$$\mathbf{U} = \frac{3}{12.8}\mathbf{e}_1 + \frac{5}{12.8}\mathbf{e}_2 + \frac{7}{12.8}\mathbf{e}_3 + \frac{9}{12.8}\mathbf{e}_4$$

Se verifica que la norma de **U** es 1.

3.5.6. Dirección de un vector en R^n

La dirección de un vector **A**=(a_1; a_2; …; a_n) está definida por 'n' ángulos, formados por el vector **A** con cada uno de los vectores coordenados unitarios. Dichos ángulos se conocen como ángulos directores del vector **A** en R^n.

Analíticamente

$$\text{Cos } \alpha_1 = \frac{a_1}{\| A \|} \qquad \text{Cos } \alpha_2 = \frac{a_2}{\| A \|} \; \ldots \qquad \text{Cos } \alpha_n = \frac{a_n}{\| A \|}$$

Ejemplo 40:

Halle los cosenos directores del vector **A** = (3; 5; 7; 9)

Entonces:

$||A|| = 12.8$

$\text{Cos}\,\alpha = \dfrac{3}{12.8}$ $\text{Cos}\,\beta = \dfrac{5}{12.8}$ $\text{Cos}\,\gamma = \dfrac{7}{12.8}$ $\text{Cos}\,\delta = \dfrac{9}{12.8}$

3.5.7. Operaciones con vectores en R^n

Las operaciones con vectores en R^n son similares a las que se encuentran en las secciones 3.3 y 3.4 sobre vectores en R^2 y en R^3 respectivamente. Valga la aclaración que en R_n se consideran las 'n' componentes de los vectores en dichas operaciones.

3.5.7.1. Multiplicación de un escalar por un vector R^n

A= $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$; entonces: r**A**= $(ra_1, ra_2, ra_3, \ldots, ra_n)$

Ejemplo 41:

Halle 7**A** si **A**=(3; 4; 1; 9)

Entonces:

7**A**=(7x3; 7x4; 7x1; 7x9) = (21 ; 28; 7; 63)

3.5.7.2. Adición de vectores R^n

A$=(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ y **B**$=(b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n)$; entonces:
A+**B**$=(a_1+b_1 ; a_2+b_2; a_3+b_3; \ldots; a_n+b_n)$

Ejemplo 42:

Halle **A+B** si **A**=(3; 4; 1; 9) y **B**=(5; 7; 2; 6)

Entonces:

A+B=(3+5 ; 4+7; 1+2; 9+6) = (8 ; 11; 3; 15)

3.5.7.3. Sustracción de vectores R^n

A$=(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ y **B**$=(b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n)$; entonces,
A-**B**$=(a_1-b_1 ; a_2-b_2; a_3-b_3; \ldots; a_n-b_n)$

3.5.7.4. Producto interno de dos vectores R^n

Sean **A**$=(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ y **B**$=(b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n)$; entonces:
<A, B>$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \ldots + a_nb_n$

El objeto **<A, B>** se lee producto interno A coma B. Representa al producto interno de los vectores A y B de R^n. Este producto interno es una generalización del producto punto definido para R^2 y R^3.

La distinción del producto interno de R^n permite la aplicación de matrices, polinomios y otras funciones vectoriales en el lugar de los vectores A y B. Este análisis se efectuará enel próximo capítulo.

Ejemplo 44:

Halle el producto interno de **A**=(3; 4; 1; 9) y **B**=(5; 7; 2; 6)

Entonces:

El producto interno es:

<A,B> = (3)(5) + (4)(7) + (1)(2) + (9)(6) = 99

Ejemplo 45:

Halle el producto interno de **A**=(3x; $4x^2$; 1; 9) y **B**=(5; 7; $2x^3$; 6)

Entonces:

El producto interno es:

<A,B> $= (3x)(5) + (4x^2)(7) + (1)(2x^3) + (9)(6)$

$$= 15x + 28x^2 + 2x^3 + 54$$

$$= 2x^3 + 28x^2 + 15x + 54$$

3.5.7.5. Ángulo entre vectores en R^n

El ángulo entre dos vectores **A**=(a_1; a_2; …:a_n) y **B**=(b_1; b_2; …; b_n) es aquel ángulo 'ϑ' de medida positiva de un vector al otro. Se cumple que $0 \leq \vartheta \leq \pi$.

El ángulo de **A** a **B** está definido por

$$\vartheta = \cos^{-1} \left[\frac{A.B}{|A|.|B|} \right]$$

Ejemplo 46:

Halle el ángulo entre los vectores A=(2;-1; 2; 0) y B=(1;-3; 0; 0).

Entonces:

El ángulo se halla de la siguiente manera:

Producto interno, **<A,B>** = (2)(1) + (-1)(-3) + (2)(0) + (0)(0) = 5

Norma de A, ||A|| = 5

Norma de B, ||B|| = $\sqrt{10}$

El ángulo es:

$$\vartheta = \cos^{-1}\left[\frac{5}{5\ \ 2}\right] = \cos^{-1}\left[\frac{1}{\ \ 2}\right] = \frac{\pi}{4} \text{ radianes} = 45^\circ$$

3.5.7.6. Vectores paralelos R^n

Los vectores **A** y **B** en R^n son paralelos si se cumple que **B** = r**A**.

Ejemplo 47:

Verifique si son paralelos **A**= (3;7;9;0) y **B**= (21;49;63;0)

Entonces:

Factorizando los componentes de **B**

B=(21;49;63;0) = (7x3;7x4; 7x9; 7x0) = 7(3;7;9;0) = 7**A**

Entonces, **B** y **A** son paralelos y del mismo sentido.

Ejemplo 48:

Verifique si son paralelos **A**= (3;4;5;0) y **B**= (-3;-4;-5;0)

Entonces:

Factorizando los componentes de **B**, **B**= - (3;4;5;0) = - **A**

Entonces, **B** y **A** son paralelos pero de sentidos opuestos.

3.5.7.7. Vectores ortogonales en R^n

Los vectores **A** y **B** en R^n son ortogonales si se cumplen las siguientes condiciones:

i) **<A.B>** = 0, o

ii) $\vartheta = \dfrac{\pi}{2}$, cuando el ángulo entre ellos es $\dfrac{\pi}{2}$ radianes.

Ejemplo 49:

Verifique si son ortogonales los vectores
A= (3;4;5;0) y **B**= (-8;6;0;0)

Entonces:

Su producto interno es:
<A.B> = (3)(-8) + (4)(6) + (5)(0) + (0)(0) = 0

Luego, **A** y **B** son ortogonales.

Ejemplo 50:

Verifique si son ortogonales los vectores
A= (3;4;5;0) y **B**= (-8;6;0;0)

Entonces

$||A|| = \sqrt{30}$ y $||B|| = 5$

$$\vartheta = \cos^{-1}\left[\frac{A.B}{\|A\|.\|B\|}\right] = \cos^{-1}\left[\frac{0}{5\sqrt{30}}\right] = \cos^{-1}[0] = \frac{\pi}{2} \text{ radianes} = 90°$$

Luego, **A** y **B** son ortogonales.

3.5.7.8. Proyección de un vector sobre otro en R^n

En un espacio R^n, la proyección de un vector **A** sobre otro **B** es aquella proyección de A en la dirección de B. Se denota por Proy_B^A .

La proyección de A en la dirección de B está definida por:

$$\text{Proy}_B^A = \underbrace{\left(\frac{<A,B>}{\|B\|}\right)}_{\text{Componente de la proyección}}\underbrace{\left(\frac{B}{\|B\|}\right)}_{\text{Vector unitario de B}}$$

Ejemplo 51:

Sean los vectores **A**=(2; 1; 1; 0) y **B**=(1; 3; 0; 0) de R^4. Halle la proyección de **A** sobre **B**.

Entonces:

$\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = 5$

$||B|| = \sqrt{10}$

La proyección de **A** en la dirección de **B** es:

$$\text{Proy}_B^A = \left(\frac{5}{\sqrt{10}}\right)\left(\frac{(1;3;0;0)}{\sqrt{10}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(1;\ 3;\ 0;\ 0)$$

3.6. Propiedades de los vectores

Sean los vectores A, B y C y el vector cero O; y los escalares a, b, c y d. Se debe cumplir que:

a) A+B=B+A
b) A+(B+C)=(A+B)+C
c) Existe un vector cero O, para el cual, A+O=A
d) Existe un vector –A, tal que A+(-A)=O
e) (cd)A=c(dA)
f) c(A+B)=cA+cB
g) (c+d)A=cA+dA
h) 1(A)=A
i) Desigualdad de Schwarz: $|A.B| \leq ||A||\ ||B||$
j) Desigualdad triangular: $||A+B|| \leq ||A|| + ||B||$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Halle las componentes de **A**, para que **A** $=(t, 5t)$ y **B** $=(b_1, b_2)$ sean dos vectores iguales para $t=9$.

Solución:

$A=B$
$(t, 5t)= (b_1, b_2) \wedge t=9.$

Luego, $b_1=9$ y $b_2=45$.

2. Halle la norma del vector **A** = 2**i** + 2**j**.

Solución:

La norma de **A** es:

$$||\mathbf{A}|| = 2^2 + 2^2 = 2 \quad 2$$

3. Halle la dirección del vector $(a_1; a_2)$. Se sabe que $a_2=-a_1$.

Solución:

Analíticamente,

$$\vartheta = \tan^{-1}\left(\frac{a_2}{a_1}\right) = \tan^{-1}\left(-\frac{a_1}{a_1}\right) = \tan^{-1}(-1)$$

$$= 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4} \text{ radianes}$$

$$= 315°$$

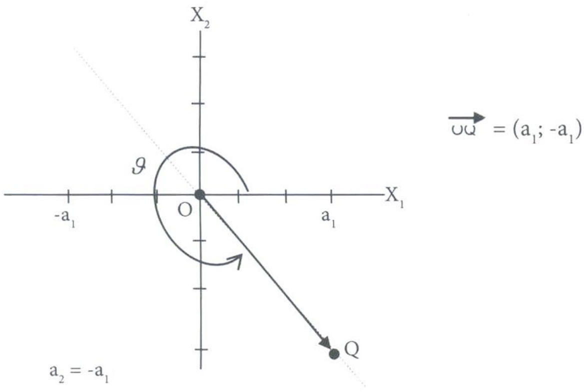


Figura 3.12

4. Exprese como la combinación lineal de vectores coordenados unitarios para el vector **A** = (3; 2).

Solución:

(3; 2) = (3; 2)

Desdoblando (3; 2) en cada eje cartesiano:
(3; 2) = (3; 0) + (0; 2).
Factorizando cada par:
(3; 2) = 3(1; 0) + 2(0; 1).
Reemplazando **i** y **j**:
(3; 2) = 3**i** + 2**j**.

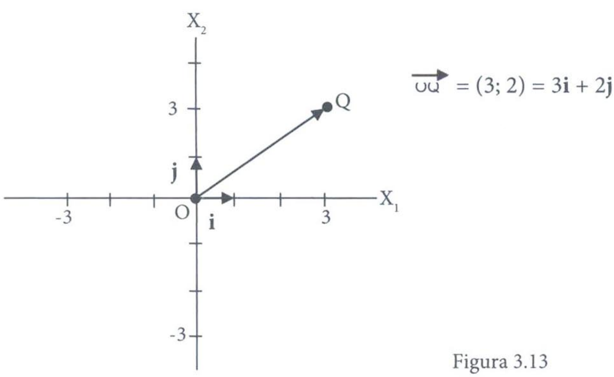


Figura 3.13

5. Halle el vector unitario del vector **A** = 3**i** + 4**j**.

Solución:

Su norma es ||**A**|| = $3^2 + 4^2$ = 5.

Luego, el vector unitario de **A** es:

$$\mathbf{U} = \frac{3}{5}\,\mathrm{i} + \frac{4}{5}\,\mathbf{j}$$

Se verifica que la norma de **U** es 1.

6. Halle 5**A** a partir del vector **A**=(3;4).

Solución:

Entonces:

5**A**=(5x3; 5x4) = (15 ; 20) ó 5**A**=5x3**i** + 5x4**j** = 15**i** + 20**j**

7. Halle el opuesto del vector **A**=(4;3).

Solución:

(-1)**A**=(-1x4; -1x3) = (-4 ; -3) ó (-1)**A**=-1x4**i** + -1x3**j** = -4**i** - 3**j**

8. Halle la suma de los vectores **A**=(3;0) y **B**=(0;7).

Solución:

A+B=(3+0 ; 0+7) = (3 ; 7) ó **A+B**=(3+0)**i** + (0+7)**j**=3**i** + 7**j**

9. Halle el producto escalar de los vectores **A**=(3;1) y **B**=(1;7).

Solución:

El producto escalar es **A.B** = (3)(1) + (1)(7) = 10

10. Halle el ángulo entre los vectores **A**=(1;1) y **B**=(1;2).

Solución:

El ángulo de **A** a **B** se halla de la siguiente manera:

Producto escalar, **A.B** = (1)(1) + (1)(2) = 3

Norma de A, ||A|| = 2

Norma de B, ||B|| = 5

El ángulo entre **A** y **B** es $\vartheta = \cos^{-1}\left[\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right]$ radianes

11. ¿Son paralelos los vectores **A**=7**i**+3**j** y **B**=28**i**+21**j**?

Solución:

Factorizando los componentes de **B**

B = 28**i** + 21**j** = 7**x**4**i** + 7**x**3**j** = 7(4**i**+3**j**) = 7**A**.

Entonces, **B** y **A** son paralelos y del mismo sentido.

12. ¿Son paralelos los vectores **A**=4**i** + 3**j** y **B**=-4**i** - 3**j**?

Solución:

Factorizando los componentes de **B**, **B**= -(4**i** + 3**j**) = - **A**

Entonces, **B** y **A** son paralelos pero de sentidos opuestos.

13. ¿Son ortogonales los vectores **A**=4**i** + 3**j** y **B**=-6**i** + 8**j**?

Solución:

Su producto escalar es **A.B** = (4)(-6) + (3)(8) = 0.

Entonces, **A** y **B** son ortogonales.

14. ¿Son ortogonales los vectores **A**=4**i** + 3**j** y B=-3**i** + 4**j**?

Solución:

||A||=5 y ||B||=5

$$\vartheta = \cos^{-1}\left[\frac{A.B}{|A|.|B|}\right] = \cos^{-1}\left[\frac{0}{25}\right] = \cos^{-1}[0] = \frac{\pi}{2} \text{ radianes} = 90°.$$

Entonces, **A** y **B** son ortogonales.

15. Halle la proyección **A**=(-1;2) sobre **B**=(-3;1).

Solución:

A.B= 5

$||\mathrm{B}|| = \sqrt{10}$

La proyección de **A** en la dirección de **B** es:

$$\mathrm{Proy}_{B}^{A} = \left(\frac{5}{\sqrt{10}}\right)\left(\frac{(-3;1)}{\sqrt{10}}\right) = \frac{1}{2}(-3;1) = \frac{1}{2}(-3\mathbf{i} + \mathbf{j}) = -\frac{3}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$$

16. Halle las componentes de **A**, para que **A** $=(a_1, a_2, a_3)$ y **B** $=(3; 6; 9)$ sean dos vectores iguales.

Solución:

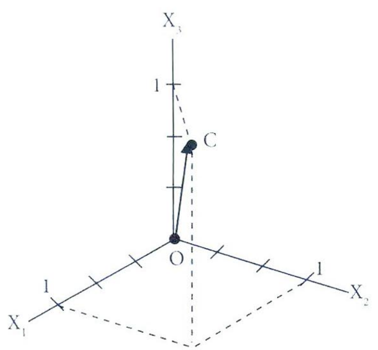
A=B
$(a_1, a_2, a_3) = (3; 6; 9)$
Luego, $a_1=3$ y $a_2=6$ y $a_3=9$

17. Halle la norma del vector **A** = **i** + **j** + **k**

Solución:

La norma de **A** es:

$$||\mathbf{A}|| = \quad 1^2 + 1^2 + 1^2 = \quad 3$$



$\overrightarrow{OQ} = (1; 1; 1)$

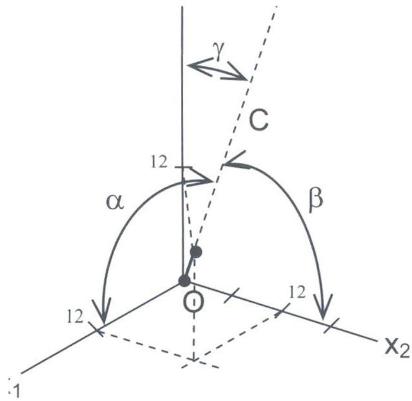
Figura 3.14

18. Halle los cosenos directores del vector A = (12 12 12

Solución:

$||A|| = 6$

$\text{Cos}\,\alpha = \frac{12}{6}$ $\qquad$ $\text{Cos}\,\beta = \frac{12}{6}$ $\qquad$ $\text{Cos}\,\gamma = \frac{12}{6}$



$\overrightarrow{OC} = \mathbf{A} = (12;\ 12;\ 12)$

Figura 3.15

19. Halle la combinación lineal de **A** = $(a_1; a_2; a_3)$ con los vectores coordenados unitarios, sabiendo que $a_1=a_2=a_3=t$.

Solución:

$(a_1; a_2; a_3) = (t; t; t)$.

Desdoblando $(a_1; a_2; a_3)$ en cada eje cartesiano:
$(a_1; a_2; a_3) = (t; 0; 0) + (0; t; 0) + (0; 0; t)$.

Factorizando cada par:
$(a_1; a_2; a_3) = t(1; 0; 0) + t(0; 1; 0) + t(0; 0; 1)$.

Reemplazando **i** , **j** y **k**:
$(a_1; a_2; a_3) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$
$(a_1; a_2; a_3) = t(\mathbf{i} + \mathbf{j} + t\mathbf{k})$

20. Halle el vector unitario del vector **A** = 2**i** + 6**j** + 3**k**.

Solución:

Su norma es $||\mathbf{A}|| = \quad 2^2 + 6^2 + 3^2 = 7$.

Luego, el vector unitario de **A** es:

$$\mathbf{U} = \frac{2}{7}\,\mathbf{i} + \frac{6}{7}\,\mathbf{j} + \frac{3}{7}\,\mathbf{k}$$

Se verifica que la norma de **U** es 1.

21. Halle **A**-**B** si **A**=(4; 1; 3) y **B**=(5; 7; 2).

Solución:

A-**B**=(4-5 ; 1-7; 3-2) = (-2 ; -6; 1) ó
A+**B**=(4-5)**i** + (1-7)**j**+ (3-2)**k** = -2**i** - 6**j** + **k**

22. Halle el producto vectorial de los vectores **A**=(4; 3; 1) y **B**=(5; 7; 0).

Solución:

El producto vectorial es:

$$\mathbf{AxB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & 0 \end{vmatrix} = (3x0\text{-}7x1;\ 4x0\text{-}5x1;\ 4x7\text{-}5x3) = (\text{-}7;\ \text{-}5;\ 6)$$

23. Halle el ángulo entre los vectores **A**=(2; 1; 2) y **B**=(1;-3; 0)

Solución:

El ángulo de **A** a **B** se halla de la siguiente manera:

Producto escalar, **A.B** = (2)(1) + (1)(-3) + (2)(0) = -1

Norma de A, $||A|| = 5$

Norma de B, $||B|| = \sqrt{10}$

El ángulo de **A** a **B** es $\vartheta = \cos^{-1}\left[\frac{-1}{5\ \ 2}\right]$ radianes

24. ¿Son paralelos los vectores **A**=9**i**+7**j**+3**k** y **B**=63**i**+49**j**+21**k**?

Solución:

Factorizando los componentes de **B**,
B = 63**i**+49**j**+21**k** = 7x9**i** + 7x4**j** + 7x3**k** = 7(9**i**+4**j**+3**k**) = 7**A**.

Entonces, **B** y **A** son paralelos y del mismo sentido.

25. ¿Son ortogonales los vectores **A**=5**i** + 4**j** + **k** y **B**=-6**i** + 6**j** + 0**k**?

Solución:

Su producto escalar es **A.B** = (3)(-6) + (4)(6) + (1)(0) = 6. Entonces, **A** y **B** no son ortogonales.

26. Halle la proyección ortogonal de **A**=(1; 3; 0) sobre **B**=(2; 1; 1).

Solución:

A.B=5

||B||= 6

La proyección de **A** en la dirección de **B** es:

$$\mathrm{Proy}_B^A = \left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{(2;1;1)}{6}\right) = \frac{5}{6}(2;\ 1;\ 1)$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Exprese y grafique el vector $v = \overrightarrow{PQ}$ en términos de sus componentes, si P=(2, 3) y Q=(1, 4).

Respuesta: $\mathbf{v} = (-1; 1)$

2. Calcule el valor de k sabiendo que el módulo del vector v=(k, 3) es 5.

Respuesta: $k = \pm 4$

3. Halle la norma y dirección de los siguientes vectores:

(a) $\mathbf{v}=(-2 \quad 3)$ (b) $\mathbf{w}=(-3, -3)$ (c) $\mathbf{u}=(0, 3)$

Respuesta: (a) $||\mathbf{v}||= 4,\ \vartheta = {}^{5\pi}{}_{6}$

(b) $||\mathbf{w}||= 3 \quad 2,\ \vartheta = {}^{5\pi}{}_{4}$

(b) $||\mathbf{u}||= 3,\ \vartheta = {}^{\pi}{}_{2}$

4. Halle el valor de x. El vector $\mathbf{a}=(x^2-2x, x^2-x)$ es igual al vector $\mathbf{b}=(3, 6)$.

Respuesta: x= 3

5. Halle y grafique la suma y la diferencia de los siguientes vectores:

(a) **u**=(-2, -4) y **v**=(3, -2) (b) **u**=(-1, 4) y **v**=(3,2)

Respuesta: (a) **u+v** = (1, -6)
u-v = (-5, -2)
(b) **u+v** = (1, -6)
u-v = (-5, -2)

6. Halle y grafique el vector unitario de los siguientes vectores:

(a) **v**=3**i**-4**j** (b) **v**=-4**i** + 4 3 **j**

Respuesta: (a) $\frac{3}{5}$ i - $\frac{4}{5}$ j

(b)- $\frac{1}{2}$ i + $\frac{3}{2}$ j

7. Verifique si son ortogonales o paralelos los siguientes vectores:

(a) **u**=3**i** + 5**j** y **v**=-6**i** -10**j** (b) **u**=7**i** y **v**=23**j**

Respuesta: (a) paralelos
(b) ortogonales

8. Si los vectores son **u**=-5**i** + **j** y **v**=4**i** + 2**j**, halle y grafique:

(a) la proyección de **v** sobre **u**
(b) la proyección de **u** sobre **v**

Respuesta: (a) $Proy_u^v = \frac{45}{13}\mathbf{i} - \frac{9}{13}\mathbf{j}$

(b) $Proy_u^v = \frac{18}{5}\mathbf{i} - \frac{9}{5}\mathbf{j}$

9. Halle y grafique el punto final del vector **v**=7**i** –**j** + 3**k**, sabiendo que su punto inicial es P=(-2, 3, 5)

Respuesta: El punto final es (5, 2, 8)

10. Halle y grafique el ángulo que forman los siguientes vectores:

(a) **u**=(3, -1, 2) y **w**=(1, -1, 2)
(b) **v**=(-4, 0, 2) y **z**=(2, 0, -1)

Respuesta: (a) $\vartheta = 90°$
(b) $\vartheta = 180°$

11. Halle el producto vectorial de **u**=**i**-**j**+2**k** y **v**=2**i**+8**j**+5**k**

Respuesta: -21**i** – **j** + 10**k**

¿Sabías que los cinco números más importantes son 1, i, π y e, y que se relacionan en la identidad de Euler $e^{i}\pi+1=0$?

IV Unidad Didáctica

Espacios y Sub espacios Vectoriales
Transformaciones Lineales

Introducción

En el capítulo anterior se estudiaron las propiedades y operaciones de los vectores en dos y tres dimensiones mediante el plano cartesiano y el espacio cartesiano respectivamente. También se aplicaron las mismas propiedades y operaciones de los vectores en n dimensiones en forma analítica en lugar de las propiedades geométricas.

Ahora, se enfoca el estudio de los espacios vectoriales y las transformaciones lineales basados en los vectores de n componentes.

Como una primera idea, un espacio vectorial puede ser un conjunto de vectores con un mismo origen y cuyos extremos terminales pueden construir una recta o un plano, por ejemplo, además de otras entidades.

Una transformación lineal puede ser vista como una función cualquiera con valor vectorial de una variable vectorial. Se puede utilizar en algún modelo en el que las entradas a algunos procesos se transforman en salidas. Por ejemplo, se puede visualizar cómo los datos de precios y producción se transforman en una estructura de ganancias.

4.1 Espacio vectorial

El vector estudiado en el tercer capítulo, tiene la estructura de una matriz columna. En general, una matriz columna de n filas, se constituye en la estructura de un vector columna de 'n' dimensiones con punto de inicio en el origen de coordenadas.

4.1.1. Definición de espacio vectorial

En general, un espacio vectorial se denota por V. Es un conjunto de vectores columna que satisface las operaciones de suma de dos vectores cualesquiera y las de la multiplicación por un escalar.

4.1.2. Propiedades de un espacio vectorial

Sean:

u, **v** y **w**	vectores cualesquiera en R^n
r y s	escalares cualesquiera en R

4.1.2.1. Propiedades de la suma de vectores

A1	Ley asociativa	$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
A2	Ley conmutativa	$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$
A3	Naturaleza del vector cero	$\mathbf{O} + \mathbf{v} = \mathbf{v}$
A4	Inverso aditivo	$\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{O}$

4.1.2.2. Propiedades de la multiplicación por un escalar

E1	Ley distributiva	$r(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = r\mathbf{v} + r\mathbf{w}$
E2	Ley distributiva	$(r+s)\mathbf{v} = r\mathbf{v} + s\mathbf{v}$
E3	Ley asociativa	$r(s\mathbf{v}) = (rs)\mathbf{v}$

E4 Preservación de escala $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$

Se observa que se utilizan escalares reales. Es decir, los escalares r y s pertenecen al conjunto de números reales R; entonces, el espacio vectorial V es un espacio vectorial real.

Ejemplo 1:

Sean los escalares reales r=5 y s=9, el vector **v** =(1, 1, 1, 1). Aplique la propiedad E2 para verificar que el resultado es otro vector con componentes reales.

$$E2: (r+s)\mathbf{v} = r\mathbf{v} + s\mathbf{v}$$

Introduciendo los escalares reales y el vector

$$\begin{aligned} (5+9)(1, 1, 1, 1) &= 5(1, 1, 1, 1) + 9(1, 1, 1, 1) \\ 14(1, 1, 1, 1) &= (5, 5, 5, 5) + (9, 9, 9, 9) \\ 14(1, 1, 1, 1) &= (14, 14, 14, 14) \end{aligned}$$

Luego, el conjunto de todos los vectores con estructura (a_1, a_2, a_3, a_4) es un espacio vectorial V_4.

También hay casos en que se utilizan escalares complejos. Es decir, los escalares r y s pertenecen al conjunto de números complejos C; entonces, el espacio vectorial V será un espacio vectorial complejo.

Ejemplo 2:

Sean los escalares complejos r=5+2i y s=9+6i, el vector **v** =(1, 1, 1, 1). Aplique la propiedad E2 para verificar que el resultado es otro vector columna con componentes complejas.

$$\text{E2: } [r+s]\mathbf{v} = r\mathbf{v} + s\mathbf{v}$$

Introduciendo los escalares complejos y el vector:

$$\begin{aligned}
[(5+2i) + (9+6i)](1,1,1,1) &= (5+2i)(1,1,1,1) + (9+6i)(1,1,1,1)\\
[14+8i](1,1,1,1) &= (5+2i, 5+2i, 5+2i, 5+2i) + (9+6i, 9+6i, 9+6i, 9+6i)\\
[14+8i](1,1,1,1) &= (14+8i, 14+8i, 14+8i, 14+8i)
\end{aligned}$$

Luego, el conjunto de todos los vectores con estructura (a_1, a_2, a_3, a_4) y con escalares complejos es un espacio vectorial C_4.

Cabe aclarar que en este curso de Álgebra Lineal se usan escalares reales que indican al Espacio Vectorial V real o, simplemente, Espacio Vectorial V.

Analíticamente, se pueden construir espacios vectoriales dependiendo del número de componentes que posea la estructura de sus vectores columna. Y cada uno de esos espacios vectoriales satisface las propiedades de las secciones 4.1.2.1 y 4.1.2.2.

4.1.3. Espacios vectoriales sobre R^1, R^2 y R^3

4.1.3.1. Espacio vectorial sobre R^1

Un espacio vectorial sobre R es aquel donde cada vector columna tiene su punto inicial en el origen de coordenadas de la recta real y su punto terminal en cualquier punto de dicha recta.

Figura 4.1

En el espacio unidimensional R de infinitos números reales, la recta real, existen infinitos puntos fuera del origen de coordenadas; entonces, el espacio vectorial sobre R tiene infinitos vectores de una componente, en dicha recta.

4.1.3.2. Espacio vectorial sobre R^2

Un espacio vectorial sobre R^2 es aquel donde cada vector columna tiene su punto inicial en el origen de coordenadas del plano cartesiano y su punto terminal en cualquier punto de dicho plano.

Por ejemplo, el vector OP tiene punto inicial en O(0; 0) y terminal en P(6; 3).

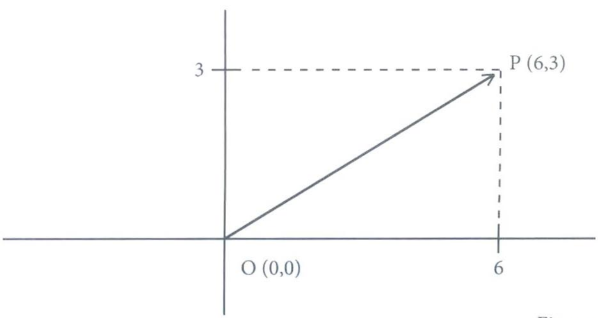


Figura 4.2

En el espacio R^2 de infinitos pares ordenados, o plano cartesiano, existen infinitos puntos fuera del origen de coordenadas O(0; 0), entonces, el espacio vectorial sobre R^2 tiene infinitos vectores columna de dos componentes cada uno, en dicho plano.

4.1.3.3. Espacio vectorial sobre R^3

Un espacio vectorial sobre R^3 es aquel donde cada vector columna tiene su punto inicial en el origen de coordenadas del espacio tridimensional y su punto terminal en cualquier octante. Por ejemplo, el vector OP tiene punto inicial en O(0; 0) y terminal en P(2; 6; 7).

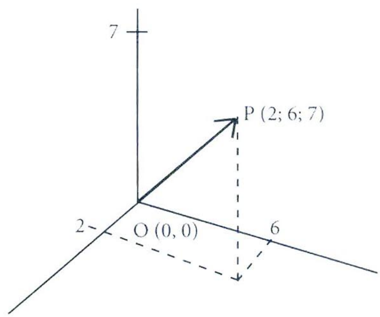


Figura 4.3

En el espacio R^3 de infinitas ternas ordenadas existen infinitos puntos fuera del origen de coordenadas O(0; 0; 0), entonces, el espacio vectorial sobre R^3 tiene infinitos vectores de tres componentes cada uno, en dicho espacio.

4.1.4. Espacios vectoriales sobre R^n

Un espacio vectorial sobre R^n es aquel donde cada vector columna tiene 'n' componentes y su punto inicial está en el origen de coordenadas de R^n.

Por ejemplo, el vector OP tiene punto inicial en O (0; 0; ...; 0) y terminal en P $(a_1; a_2; a_3; \dots ; a_n)$.

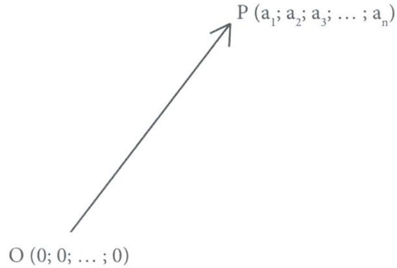


Figura 4.4

En el espacio R^n con infinitos arreglos ordenados de 'n' componentes, existen infinitos puntos fuera del origen de coordenadas O (0; 0; … ; 0); entonces, el espacio vectorial sobre R^n tiene infinitos vectores columna de 'n' componentes cada uno.

4.1.5. Otros espacios vectoriales

4.1.5.1. Espacio vectorial M

El conjunto de todas las matrices de orden mxn está definido como el espacio vectorial M porque satisface las propiedades para la suma de vectores y las propiedades para la multiplicación por un escalar.

Considere todas las posibles matrices M_k de orden mxn que se pueden construir de acuerdo a la estructura siguiente:

$$M_k = \begin{pmatrix} a_{k11} & a_{k12} & a_{k13} & \cdots & a_{k1n} \\ a_{k21} & a_{k22} & a_{k23} & \cdots & a_{k2n} \\ a_{k31} & a_{k32} & a_{k33} & \cdots & a_{k3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{km1} & a_{km2} & a_{km3} & \cdots & a_{kmn} \end{pmatrix}$$

En forma abreviada:

$Mk = (a_{k\ ij})mxn\ \forall$ fila i=1, 2,..., m $\wedge$ columna j=1, 2,..., n

para cada k-ésima matriz con k=1, 2, 3, 4, ... ∞.

Ejemplo 3:

Sean los escalares reales r=5 y s=9, la matriz $M_1 = (a_1\ ij)$ mxn. Aplique la propiedad E2 para verificar que el resultado es otra matriz con la misma estructura.

E2: (r+s)**v** = r**v** + s**v**

Introduciendo los escalares reales y la matriz

$$(5+9)M_1 = 5M_1 + 9M_1$$

$$(5+9)(a_{1\ ij}) = 5(a_{1\ ij}) + 9(a_{1\ ij})$$

$$14(a_{1\ ij}) = (5a_{1\ ij}) + (9a_{1\ ij})$$

$$14(a_{1\ ij}) = (14a_{1\ ij})$$

También se verifica que las matrices M_1 satisfacen las propiedades A1 a A4 y E1 a E4.

Luego, el conjunto de todas las matrices M_k es un espacio vectorial M.

4.1.5.2. Espacio vectorial P

El conjunto de todos los polinomios con coeficientes en R está definido como espacio vectorial P porque satisface las propiedades para la suma de vectores y las propiedades para la multiplicación por un escalar.

Considere todos los posibles polinomios P_k de grado n que se pueden construir de acuerdo a la estructura siguiente:

$$P_k = a_{k0} + a_{k1}x + a_{k2}x^2 + \dots + a_{kn}x^n$$

En forma abreviada,

$$P_k = \sum_{i=0}^{i=n} a_{ki}x^n \quad \forall \text{ término } i=1, 2,\dots, n$$

para cada k-ésimo polinomio con k=1, 2, 3, 4, … ∞.

Ejemplo 4:

Sean los escalares r=5 y s=9, y el polinomio $P_1 = a_{10} + a_{11}x + a_{12}x^2 + \dots + a_{1n}x^n$.

Aplique la propiedad E2 para verificar que el resultado es otro polinomio con la misma estructura.

Entonces:

$$\text{E2: } (r+s)\mathbf{v} = r\mathbf{v} + s\mathbf{v}$$

Introduciendo los escalares reales y el polinomio:

$$(5+9)P_1 = 5P_1 + 9P_1$$

$$(5+9)(\sum_{i=0}^{i=n} a_{1i}x^n) = 5(\sum_{i=0}^{i=n} a_{1i}x^n) + 9(\sum_{i=0}^{i=n} a_{1i}x^n)$$

$$14(\sum_{i=0}^{i=n} a_{1i}x^n) = (\sum_{i=0}^{i=n} 5a_{1i}x^n) + (\sum_{i=0}^{i=n} 9a_{1i}x^n)$$

$$14(a_{1\ ij}) = (\sum_{i=0}^{i=n} 14a_{1i}x^n)$$

También se verifica que los polinomios P_1 satisfacen las propiedades A1 a A4 y E1 a E4.

Luego, el conjunto de todos los polinomios P_k es un espacio vectorial P.

4.1.5.3. Espacio vectorial F

El conjunto de todas las funciones $f_k(x)$ con valores reales de una variable real está definido como espacio vectorial F porque satisface las propiedades para la suma de vectores y las propiedades para la multiplicación por un escalar.

El espacio vectorial F es el conjunto de todas las funciones f_k que transforman R en R.

Ejemplo 5:

Sean los escalares r=5 y s=9, y la función $f_1 = [f_1 (x)]$.

Aplique la propiedad E2 para verificar que el resultado es otra función con la misma estructura.

E2: (r+s)**v** = r**v** + s**v**

Introduciendo los escalares reales y la función:

$$\begin{aligned}
(5+9)f_1 &= 5f_1 &&+ 9f_1\\
(5+9)\ f_1\ (x) &= 5[f_1\ (x)] &&+ 9[f_1\ (x)]\\
(14)\ f_1\ (x) &= [5f_1\ (x)] &&+ [9f_1\ (x)]\\
(14)\ f_1\ (x) &= [14f_1\ (x)]
\end{aligned}$$

También se verifica que las funciones f_1 satisfacen las propiedades A1 a A4 y E1 a E4.

Luego, el conjunto de todas las funciones f_k es un espacio vectorial F.

4.1.5.4. Espacio vectorial complejo C

El conjunto de todos los vectores $(u_1, u_2, \ldots u_n)$, con componentes complejas, está definido como el espacio vectorial C porque satisface las propiedades para la suma de vectores y las propiedades para la multiplicación por un escalar.

Ejemplo 6:

(2+3i, 5+7i) es un elemento del espacio vectorial C_2.
(2+3i, 5+7i, 8 +9i) es un elemento del espacio vectorial C_3.

4.2. Subespacios vectoriales

4.2.1 Definición de sub espacio vectorial

Un sub espacio es un espacio vectorial contenido en un espacio vectorial más grande.

Un sub conjunto S de un espacio vectorial V es un sub espacio de V si satisface las dos condiciones siguientes:

- Si **v** y **w** están en S, entonces, **v+w** está en S.
- Si r es cualquier escalar de R y **v** está en S; entonces, **rv** está en S.

Ejemplo 7:

Considere un espacio vectorial R^2 representado por todos los pares ordenados del plano cartesiano. Y considere un espacio vectorial U representado por todos los pares ordenados de la recta y=x en el mismo plano.

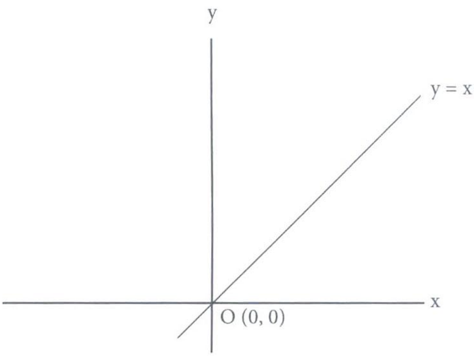


Figura 4.5

Se observa que la recta y=x pertenece al plano cartesiano. Entonces, el espacio vectorial U está contenido en el espacio vectorial R^2 más grande.

Luego, U es un sub espacio de R^2.

4.2.2. Propiedades de un sub espacio vectorial

El sub espacio vectorial tiene las mismas propiedades del espacio vectorial. Las cuales se replican a continuación.

4.2.2.1. Propiedades de la suma de vectores

A1	Ley asociativa	$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
A2	Ley conmutativa	$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$
A3	Naturaleza del vector cero	$\mathbf{O} + \mathbf{v} = \mathbf{v}$
A4	Inverso aditivo	$\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{O}$

4.2.2.2. Propiedades de la multiplicación por un escalar

E1	Ley distributiva	$r(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = r\mathbf{v} + r\mathbf{w}$
E2	Ley distributiva	$(r+s)\mathbf{v} = r\mathbf{v} + s\mathbf{v}$
E3	Ley asociativa	$r(s\mathbf{v}) = (rs)\mathbf{v}$
E4	Preservación de escala	$1\mathbf{v} = \mathbf{v}$

4.2.3 Combinaciones lineales de vectores

Un vector **v** del espacio vectorial V es una combinación lineal de los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ si existen escalares $c_1, c_2, \ldots c_n$ tales que **v** pueda expresarse de la manera siguiente:

$$\mathbf{v} = c_1\, \mathbf{v}_1 + c_2\, \mathbf{v}_2 + \ldots + c_n\, \mathbf{v}_n$$

Ejemplo 8:

Considere el espacio vectorial U representado por todos los pares ordenados de la recta y=x en el plano cartesiano.

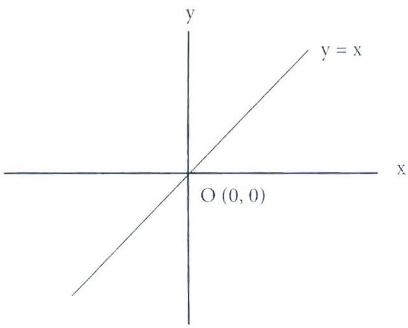


Figura 4.6

Se observa que y=x implica un par ordenado (x, y) = (x, x).

Asignando un escalar t real a x, se tiene el par ordenado (t, t).

Los pares ordenados del sub espacio U tienen la forma (t, t).

Y cualquier vector (t, t) del sub espacio U se puede expresar de la manera siguiente:

$$(t, t) = (t, 0) + (0,t)$$
$$(t, t) = t(1, 0) + t(0,1)$$

Se observa que el vector (t, t) se puede expresar como una suma de las multiplicaciones de un escalar t por los vectores (1, 0) y (0, 1).

4.2.4 Sub espacios vectoriales generados por vectores

Sea gn($\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$,..., $\mathbf{v}_k$) un sub espacio generado por algunos vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$,..., $\mathbf{v}_k$ del espacio vectorial V, con escalares r_1, r_2,...r_k reales tales que gn($\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$,..., $\mathbf{v}_k$) pueda expresarse de la manera siguiente:

$$\text{gn}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k) = r_1\, \mathbf{v}_1 + r_2\, \mathbf{v}_2 + \ldots + r_k\, \mathbf{v}_k$$

Se dice que la combinación lineal de algunos vectores del espacio vectorial V es un sub espacio generado por dichos vectores.

Ejemplo 9:

Sean $\mathbf{v}_1$=(2, 6, 7) y $\mathbf{v}_2$=(3, 7, -1) algunos vectores del espacio vectorial R^3, con escalares r y s reales, generan el siguiente sub espacio gn(**v1**, **v2**):

$$(x_1, x_2, x_3) = r(2, 6\ , 7) + s(3, 7, -1)$$

$$\text{gn}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = r\, \mathbf{v}_1 + s\, \mathbf{v}_2$$

El sub espacio gn($\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$) es el conjunto de ternas ordenadas del plano r(2, 6 , 7) + s(3, 7, -1).

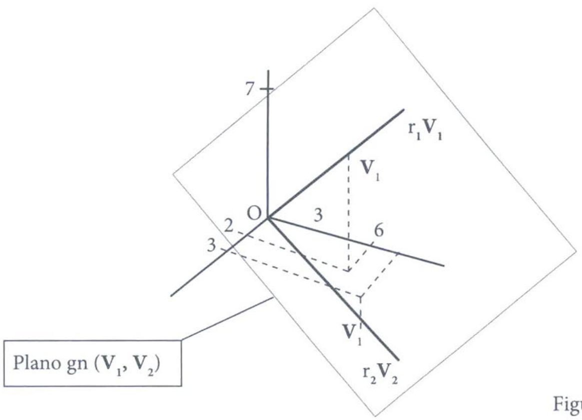


Figura 4.7

4.3 Dependencia de vectores

4.3.1. Vectores linealmente independientes

Sean dos o más vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ linealmente independientes si existen escalares $a_1, a_2, \ldots, a_m$, todos 0, tales que $a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + a_m \mathbf{v}_m = 0$.

Ejemplo 10:

Sean los vectores **u**=(1, 0, 0), **v**=(0, 1, 0) y **w**=(0, 0, 1) linealmente independientes porque existen escalares a_1, a_2 y a_3, todos 0, tales que:

$$0(1, 0, 0) + 0(0, 1, 0) + 0(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

$$0\mathbf{u} + 0\mathbf{v} + 0\mathbf{w} = \mathbf{O}$$

4.3.2. Vectores linealmente dependientes

Sean dos o más vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ linealmente dependientes; entonces, uno de los vectores es una combinación lineal de los precedentes. Es decir, existe un $k>1$ tal que $\mathbf{v}_k = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + c_{k-1} \mathbf{v}_{k-1}$.

Ejemplo 11:

Los vectores **u**=(1, -1, 0), **v**=(1, 3, -1) y **w**=(5, 3, -2) son linealmente dependientes porque existen escalares, no todos 0, tales como 3, 2 y -1:

$$3(1, -1, 0) + 2(1, 3, -1) - (5, 3, -2) = (0, 0, 0)$$

$$3\mathbf{u} + 2\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{O}$$

Despejando **u**:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{3}\mathrm{w} - \frac{2}{3}\mathrm{v}$$

4.3.3. Vectores generadores

Los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ de R^n generan todo R^n si, y sólo si, la matriz A de nxn que tiene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ como vectores columna es invertible.

Ejemplo 12:

¿Generan los vectores (2, 1, 3), (-1, 2, 0) y (1, 8, 6) un espacio R^3?

Solución:

Formando la matriz A con estos vectores como vectores columna.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Reduciendo por filas para ver si es invertible.

F1 x F2 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

F2 – 2F1 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -6 & -18 \end{bmatrix}$

(-1/5)F2 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 0 & -5 & -15 \\ 0 & -6 & -18 \end{bmatrix}$

F3 + 6F2 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Se obtiene una matriz escalonada equivalente a la matriz A, cuya determinante:

$$\text{Det}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = 0$$

Es decir, A no es invertible.

Entonces, los vectores (2, 1, 3), (-1, 2, 0) y (1, 8, 6) no generan R^3.

4.3.4. Condiciones equivalentes para n vectores en R^n

Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vectores de R^n. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- Los vectores son independientes.
- Los vectores generan todo R^n.
- La matriz A que tiene estos vectores como vectores columna es invertible.

4.4. Base y dimensión de un espacio vectorial

Cualquier vector de un espacio vectorial se puede expresar como una combinación lineal de los vectores de la base. Y la dimensión del espacio vectorial es el número de vectores que tiene la base.

4.4.1. Base para un sub espacio vectorial

Sea S un sub espacio de un espacio vectorial V. Un conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ de vectores en S es una base para S si:

- El conjunto de vectores genera S; esto es, S= $gn(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k)$.
- El conjunto de vectores es linealmente independiente.

Ejemplo 13:

El conjunto $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ de vectores coordenados unitarios de R^2 es una base para R^2. Esta base se llama base canónica de R^2.

Ejemplo 14:

El conjunto $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ de vectores coordenados unitarios de R^3 es una base para R^3. Esta base se llama base canónica de R^3.

Ejemplo 15:

El conjunto $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ de vectores coordenados unitarios de Rn es una base para R^n. Esta base se llama base canónica de R^n.

4.4.2 Dimensión de un sub espacio vectorial

La dimensión de un sub espacio S de dimensión finita de un espacio vectorial V es el número de elementos en cualquier base para S y se denota por dim(S). Se considera que el sub espacio cero $\{\mathbf{O}\}$ tiene dimensión cero.

Ejemplo 16:

Los vectores coordenados unitarios $\mathbf{i}=(1, 0)$ y $\mathbf{j}=(0, 1)$ forman una base para R^2. Entonces, $\dim(R^2) = 2$.

Ejemplo 17:

Los vectores coordenados unitarios $\mathbf{i}=(1, 0, 0)$, $\mathbf{j}=(0, 1, 0)$ y $\mathbf{k}=(0, 0, 1)$ forman una base para R^3. Entonces, $\dim(R^3) = 3$.

Ejemplo 18:

Los vectores coordenados unitarios $\mathbf{e}_1=(1, 0, 0, \ldots, 0)$, $\mathbf{e}_2=(0, 1, 0, \ldots, 0)$ … $\mathbf{e}_n=(0, 0, \ldots, 1)$ forman una base para R^n. Entonces, $\dim(R^n) = n$.

4.5 Transformaciones lineales

Una transformación establece una relación entre dos espacios vectoriales V y W. Dicha transformación asigna a cada vector **v** en V un vector único **w** en W.

4.5.1 Definición de transformación lineal

Una función T que transforma el espacio vectorial V en el espacio vectorial W es una transformación lineal si satisface:

- $T(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)=T(\mathbf{v}_1)+T(\mathbf{v}_2)$ preservación de la suma.
- $T(r\mathbf{v}_1)=rT(\mathbf{v}_1)$ preservación de la multiplicación por un escalar.

Para todos los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ de V y escalares r de R.

Ejemplo 19:

Sean $\mathbf{v}=(x, y, z)$ de V y $\mathbf{w}=(x, y)$ de W y la transformación lineal $T: V \rightarrow W$, definida por $T(x, y, z) = (yz, x^2)$. Calcule T(2, 3, 4).

Solución:

Se observa que $T: V \rightarrow W$; entonces, $W=T(V)$.

Sustituyendo los componentes 2, 3 y 4 en la fórmula para T:

$$T(x, y, z) = (yz, x^2)$$
$$T(2, 3, 4) = ((3)(4), (2)^2)$$
$$T(2, 3, 4) = (12, 4)$$

Cabe comentar que $(2, 3, 4) \in V$ y $(12, 4) \in W$.

4.5.2 Operaciones con transformaciones lineales

Las transformaciones lineales, entendidas como funciones vectoriales, tienen operaciones similares a las de las funciones reales de variable real.

Para las transformaciones lineales f: A $\rightarrow$ B y g: C $\rightarrow$ D, se estudian las siguientes operaciones: suma de funciones vectoriales, multiplicación de una función vectorial por un escalar, composición de funciones vectoriales e inversa de una función vectorial.

4.5.2.1. Suma de transformaciones lineales

La suma de las transformaciones lineales f y g, denotada por (f + g), está definida cuando $(f + g)(\mathbf{v}) = f(\mathbf{v}) + g(\mathbf{v})$ para f: V $\rightarrow$ W y g: V $\rightarrow$ W. Cuando $\mathbf{v} \in V$ y $\mathbf{w} \in W$.

Ejemplo 20:

Halle la suma de las funciones vectoriales $(x_1, x_2) = (x_1+x_2, x_1-x_2)$ y $g(x_1, x_2) = (x_1+2x_2, x_1-2x_2)$

Solución:

$$(f+g)\ (x_1, x_2) = f(x_1, x_2) + g(x_1, x_2)$$
$$(f+g)\ (x_1, x_2) = (x_1+x_2, x_1-x_2) + (x_1+2x_2, x_1-2x_2)$$
$$(f+g)\ (x_1, x_2) = (2x_1+3x_2, 2x_1-3x_2)$$

4.5.2.2. Multiplicación de una transformación lineal por un escalar

Para f: V $\rightarrow$ W con $\mathbf{v} \in V$ y $\mathbf{w} \in W$, la multiplicación de una transformación lineal f por un escalar real, denotada por (rf), está definida cuando $\mathbf{w} = (rf)(\mathbf{v}) = rf(\mathbf{v})$.

Ejemplo 21:

Halle la multiplicación de la función vectorial $f(x_1, x_2) = (x_1+x_2, x_1-x_2)$ por el escalar 2.

Solución:

$$(2f)\ (x_1, x_2) = 2f(x_1, x_2)$$
$$(2f)\ (x_1, x_2) = 2(x_1+x_2, x_1-x_2)$$
$$(2f)\ (x_1, x_2) = (2x_1+2x_2, 2x_1-2x_2)$$

4.5.2.3. Composición de dos transformaciones lineales

Para f: V → W y g: W → U con **v** ∈ V, **w** ∈ W y **u** ∈ U, la composición de f y g, denotada por (g o f), está definida cuando **u** =(g o f)(**v**) = g(f(**v**)).

Ejemplo 22:

Halle la composición de las funciones vectoriales $f(x_1, x_2) =(2x_1, 2x_2)$ y $g(x_1, x_2) =(3x_1, 3x_2)$.

Solución:

$$(fog)(x_1, x_2) = g(f(x_1, x_2))$$
$$(fog)(x_1, x_2) = g(2x_1, 2x_2)$$
$$(fog)(x_1, x_2) = (3(2x_1), 3(2x_2))$$
$$(fog)(x_1, x_2) = (6x_1, 6x_2)$$

4.5.2.4. Inversa de una transformación lineal

La inversa de una transformación lineal T se denota por T^{-1}.

La transformación lineal T: V → V es invertible si existe T^{-1}, tal que $T\,T^{-1} = T^{-1}T=I$

Es decir, la transformación lineal T(**v**)=A **v** tiene inversa $T^{-1}(\mathbf{v}) = A^{-1}\mathbf{v}$.

Para calcular la inversa de la matriz asociada A, se puede aplicar uno de los métodos de cálculo de la inversa de una matriz, que se puede revisar en la sección 1.2.10.1 sobre el método de Gauss-Jordan y en la 1.2.10.2 sobre el método de la Adjunta.

Ejemplo 23:

Halle T^{-1} si la transformación lineal T es:

$$T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Solución:

Calculando la inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0.5 & 0.25 \end{pmatrix}$$

Luego, la inversa de la transformación T es:

$$T^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0.5 & 0.25 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

4.5.3. Determinación del núcleo y la imagen de una transformación lineal

4.5.3.1. Núcleo de una transformación lineal

Si T: V → W es una transformación lineal; entonces, el núcleo de T es un sub espacio de V tal que T(V)=**O**.

El núcleo de T se denota por Ker(T).

Analíticamente, Ker(T) = { **v** ∈ V / T(V)=**O**, **O**=W }.

Ejemplo 24:

Hallar la imagen de la transformación definida por $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1-2x_2, x_2+3x_3)$

Solución:

La transformación es $T:R^3 \rightarrow R^2$.

El núcleo de T es un sub espacio de R^3 tal que $T(R^3)=\mathbf{O}$.

$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1-2x_2, x_2+3x_3)$

$$T(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x_1 - 2x_2 \\ x_2 + 3x_3 \end{bmatrix} \quad \wedge \quad T(R^3) = \mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \wedge \quad T(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Construyendo la matriz ampliada del sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

F1 + 2F2: $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

En esta forma escalonada se observa que la variable libre es x_3; luego, x_3=t.

Y las variables ligadas son x_1 y x_2. Luego, las ligadas dependen de x_3.

$1x_1 + 0x_2 + 6x_3 = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 + 6x_3 = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = -6x_3 = -6t$
$0x_1 + 1x_2 + x_3 = 0 \quad \rightarrow \quad x_2 + x_3 = 0 \quad \rightarrow \quad x_2 = -x_3 = -t$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -6t \\ -t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Corresponde a una recta en R^3 con vector dirección (1, - 6, - 1).

El núcleo es Ker(T) = (1, - 6, - 1).

4.5.3.2. Imagen de una transformación lineal

Si T: V → W es una transformación lineal; entonces, el recorrido o imagen de T es un sub espacio de W para algún T(**v**).

El recorrido o imagen de T se denota por Im(T) ó R(T).

Analíticamente, R(T) = { **w** ∈ W / W=R(T), para algún **v** ∈ V } .

Ejemplo 25:

Hallar la imagen de la transformación definida por $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1-2x_2, x_2+3x_3)$.

Solución:

Como el núcleo es (1, - 6, - 1).

T(1, - 6, - 1) = (1 - 2(-6), (-6) + 3(-1))
T(1, - 6, - 1) = (13, -9)

La imagen es R(T) = (13, -9)

4.6. Matrices asociadas a transformaciones lineales

Cualquier transformación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita se puede representar por una matriz.

Sea A una matriz m x n. Sea **x** un elemento de R^n, interpretado como una matriz columna. La transformación $T:R^n \rightarrow R^m$, definida por T(**x**)=A**x**, es lineal. En dicha transformación lineal A recibe el nombre de matriz de transformación o matriz asociada a la transformación.

Ejemplo 26:

Considere la transformación lineal T definida por la matriz A de 3 x 2 siguiente. Determine la imagen de un vector cualquiera bajo T, y utilice este resultado para determinar la imagen del vector dado **x**.

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}=\begin{bmatrix}5\\ -1\end{bmatrix}$$

Solución:

Puesto que A es una matriz de 3 x 2, esta define la transformación lineal $T:R^2 \rightarrow R^3$. Se tiene:

$$T(\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}) = \begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix} \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$

$$T(\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}) = \begin{bmatrix}x-y\\ 2y\\ x+3y\end{bmatrix}$$

Si x=5 y y=-1, se calcula:

$$T(\begin{bmatrix}5\\ -1\end{bmatrix}) = \begin{bmatrix}6\\ -2\\ 2\end{bmatrix}$$

4.6.1. Relación entre transformaciones lineales y matrices

Cualquier transformación lineal entre espacios vectoriales de dimensiones finitas se puede representar por una matriz. Es decir, dada T: $R^n \rightarrow R^m$ se puede representar por una matriz A de orden m x n.

4.6.2. Matriz canónica o matriz estándar de una transformación lineal

Una transformación lineal T: $R^n \rightarrow R^m$ tiene una matriz canónica denotada por AT de orden m x n, tal que AT $\mathbf{x}$ = T($\mathbf{x}$).

Ejemplo 27:

Halle la matriz canónica de T: $R^2 \rightarrow R^2$ definida por T(x, y) = (2x - 3y, x + y).

Solución:

Utilizando las bases canónicas de R^2, son los vectores coordenados unitarios **i** y **j**.

Los vectores coordenados unitarios de R^2 son:

$$\mathbf{i} = (1, 0) \text{ ó } \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{j} = (0, 1) \text{ ó } \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Reemplazando **i** en la fórmula, se tiene:

T(x, y) = (2x - 3y, x + y)
T(1, 0) = (2(1) – 3(0), (1) + (0))
T(1, 0) = (2, 1)

$$T\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

Reemplazando **j** en la fórmula, se tiene:

T(x, y) = (2x - 3y, x + y)
T(0, 1) = (2(0) – 3(1), (0) + (1))
T(0, 1) = (-3, 1)

$$T\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\1\end{bmatrix}$$

Luego, la matriz canónica es $A_T = \begin{bmatrix}2 & -3\\1 & 1\end{bmatrix}$

4.6.3. Transformación lineal asociada a una matriz

Si se cuenta con la matriz de coeficientes del sistema, se puede obtener una transformación lineal asociada a la matriz.

Ejemplo 28:

Dada la matriz $A = \begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 2\\1 & 3\end{bmatrix}$ de 3 x 2, esta define la

transformación lineal $T:R^2 \rightarrow R^3$.

4.6.4 Matriz asociada a una transformación lineal

La matriz asociada a una transformación lineal se llama matriz de transformación y se denota por A_T. Es la transpuesta de la matriz de coeficientes del sistema.

Ejemplo 29:

Dada la transformación lineal T(x, y) = (2x - 3y, x + y), se calcula

la matriz de transformación $A_T = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

4.7 Matriz de cambio de base de transformaciones lineales

Una vez que se ha elegido una base del espacio vectorial V, ¿cómo variará la representación de cada vector de V si se elige otra base?

4.7.1 Matriz de cambio de base o matriz de transición

Sea el conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base S del espacio vectorial V.

Sea el vector **u** con coordenadas $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ referidas a la base S.

El vector **u** es:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Sea el conjunto de vectores $\{\mathbf{v'}_1, \mathbf{v'}_2, \ldots, \mathbf{v'}_n\}$ otra base S' del espacio vectorial V.

Cada vector $\mathbf{v'}_i$ de la base S' puede escribirse como una combinación lineal de los vectores $\mathbf{v}_i$ de la base S.

$$\mathbf{v'}_1 = c_{11}\mathbf{v}_1 + c_{12}\mathbf{v}_2 + \ldots + c_{1n}\mathbf{v}_n$$

$$\mathbf{v'}_2 = c_{21}\mathbf{v}_1 + c_{22}\mathbf{v}_2 + \ldots + c_{2n}\mathbf{v}_n$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mathbf{v'}_n = c_{n1}\mathbf{v}_1 + c_{n2}\mathbf{v}_2 + \ldots + c_{nn}\mathbf{v}_n$$

Sea P la traspuesta de la matriz de coeficientes (c_{ij}):

$$P = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & \ldots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \ldots & c_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{1n} & c_{2n} & \ldots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

Con la matriz P se puede efectuar el cambio de base desde la 'antigua base' S hasta la 'nueva base' S'.

La matriz P se llama matriz de cambio de base o matriz de transición.

Ejemplo 30:

Sean las bases S=[(1, 2), (3, -1)] y S'=[(1, 0), (0,1)] de R^2. Si u es un vector tal que $\mathbf{u}_S = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, encuentre $\mathbf{u}_{S'}$.

Solución:

Expresando los vectores de S en términos de los vectores de S':

(1, 2) = 1(1, 0) + 2(0, 1)
(3, -1) = 3(1, 0) − 1(0,1)

Los vectores de coordenadas (1, 2) y (3, -1) son $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$, vectores de la base S.

La matriz de transición es:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}S' = P\,\mathbf{u}S$$

$$\mathbf{u}S' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}S' = \begin{bmatrix} 15 \\ 2 \end{bmatrix}$$

4.7.2. Transición de B' a B

Sean B y B' bases para un espacio vectorial U y sea P la matriz de transición de B a B'. Entonces, P es invertible y la matriz de transición de B' a B es P^{-1}.

4.7.3. Matriz asociada del sistema y el conjunto solución

El conjunto de soluciones de un sistema se puede obtener desde dos perspectivas. La primera, la forma matricial de un sistema de ecuaciones lineales y, la segunda, la transformación lineal.

Se vio que un sistema de m ecuaciones lineales con n variables se puede expresar en forma matricial de la siguiente manera:

$$\mathbf{Ax=B}$$

A es una matriz de m x n, llamada matriz de coeficientes de sistema o matriz asociada del sistema.

El conjunto de soluciones es el conjunto de **x** que satisface esta ecuación.

Usando la segunda perspectiva, sea T: $R^n \rightarrow R^m$ la transformación lineal definida por A. El sistema de ecuaciones se puede escribir de la siguiente manera:

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{B}$$

El conjunto de soluciones es el conjunto de vectores en R^n transformado por T en el vector B. Si B no pertenece al rango de T, entonces, el sistema no tiene solución.

4.7.4. Dimensión del espacio solución de un sistema de ecuaciones lineales homogéneas

La dimensión del espacio solución de un sistema homogéneo de m ecuaciones lineales homogéneas es el número de vectores que tiene la base.

Sea T la transformación lineal de R^n en R^m, definida por A.

El conjunto de soluciones es el núcleo de la transformación y por consiguiente, un sub espacio.

El conjunto de soluciones de un sistema homogéneo de m ecuaciones lineales con n variables, A**x**=**0**, es un espacio de R^n.

Ejemplo 31:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ -x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

La matriz ampliada del sistema es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Reduciendo a la forma escalonada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Las variables ligadas son x_1 y x_2.

La variable libre es x_3.

$x_1 = -5x_3$ y $x_2 = x_3$ y asignando el escalar t a x_3

$(x_1, x_2, x_3) = (-5t, t, t) = t(-5,1, 1)$

El conjunto solución es un conjunto de vectores de la format(-5,1, 1).

El conjunto de vectores { r(-5, 1, 1)} es un sub espacio unidimensional de R^3 cuya base es el único (-5, 1, 1). Un único vector en la base define un sub espacio unidimensional de R^3.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Diga si W es un sub espacio vectorial en R3, definido por:

   $W=\{(x,y,z) \in R^3/2x+y-z=0\}$

Solución:

Sean $\mathbf{w_1} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\mathbf{w_2} =(x_2, y_2, z_2)$ dos vectores de W.

con $2x_1 + y_1 - z_1 = 0$ y $2x_2 + y_2 - z_2 = 0$ ecuaciones en R^3.

Aplicando la propiedad de cerradura para la suma:

$\mathbf{w_1} \wedge \mathbf{w_2} \in W$, entonces, $\mathbf{w_1} + \mathbf{w_2} \in W$.

$\mathbf{w_1} + \mathbf{w_2} = (x_1, y_1, z_1) +(x_2, y_2, z_2)$

$\mathbf{w_1} + \mathbf{w_2} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

con $2(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2 - (z_1 + z_2) = 0$

La suma $\mathbf{w_1} + \mathbf{w_2}$ tiene la misma estructura de los vectores $\mathbf{w_1}$ y $\mathbf{w_2}$ del espacio vectorial W.

Luego, $\mathbf{w_1} + \mathbf{w_2} \in W$.

Aplicando la propiedad de cerradura para la multiplicación por un escalar:

$\mathbf{w_1} \in W$ con $2x_1 + y_1 - z_1 = 0$; entonces, $r\mathbf{w_1} \in W$.

$r\mathbf{w_1} = r(x_1, y_1, z_1)$

$r\mathbf{w_1} = (rx_1, ry_1,rz_1)$ con $2rx_1 + ry_1 - rz_1 = 0$

La multiplicación por un escalar $\mathbf{rw}_1$ tiene la misma estructura del vector $\mathbf{w}_1$ del espacio vectorial W.

Luego, $\mathbf{rw}_1 \in W$.

En conclusión, W es un sub espacio vectorial en R^3 definido por:

$W=\{(x,y,z) \in R^3/2x+y-z=0\}$.

2. Determine si los vectores $\mathbf{v}_1=(1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2=(2, 2, 0)$ y $\mathbf{v}_3=(3, 0, 0)$ generan el espacio vectorial R^3.

Solución:

Construyendo la matriz asociada al sistema de ecuaciones lineales dado por los vectores columna $\mathbf{v}_1=(1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2=(2, 2, 0)$ y $\mathbf{v}_3=(3, 0, 0)$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se observa una matriz de orden 3x3. Se puede calcular el determinante de A.

$\mathrm{Det}(A) = -6$

Como $\mathrm{Det}(A) \neq 0$; entonces, A es invertible. Por lo que el sistema es consistente. Tiene solución.

En conclusión, los vectores $\mathbf{v}_1=(1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2=(2, 2, 0)$ y $\mathbf{v}_3=(3, 0, 0)$ generan el espacio vectorial R^3.

3. Diga si los vectores $\mathbf{v}_1 = (2, -1, 4)$, $\mathbf{v}_2 = (4, 1, 6)$ generan un espacio vectorial en R^3.

Solución:

Sea $\mathbf{w} = (x, y, z)$ un vector cualquiera de R^3.

Escribiendo $\mathbf{w}$ como una combinación lineal de los vectores generadores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$.

$\mathbf{w} = (x, y, z)$

$\mathbf{w} = c_1\, \mathbf{v}_1 + c_2\, \mathbf{v}_2$

$\mathbf{w} = c_1(2, -1, 4) + c_2\,(4, 1, 6)$ con coeficientes c_1 y c_2 escalares reales

$c_1\,(2, -1, 4) + c_2\,(4, 1, 6) \;=\; (x, y, z)$

A la forma matricial AC=W:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Construyendo la matriz ampliada del sistema dado por los vectores columna $\mathbf{v}_1 = (2, -1, 4)$, $\mathbf{v}_2 = (4, 1, 6)$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & x \\ -1 & 1 & y \\ 4 & 6 & z \end{bmatrix}$$

Reduciendo a la forma escalonada por filas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{x-4y}{6} \\ 0 & 1 & \frac{x+2y}{6} \\ 0 & 0 & \frac{-10x+4y+6z}{6} \end{bmatrix}$$

$$1c_1 + 0c_2 = \frac{x-4y}{6} \quad \rightarrow \quad c1 = - \frac{x-4y}{6}$$

$$0c_1 + 1c_2 = \frac{x+2y}{6} \quad \rightarrow \quad c2 = - \frac{x+2y}{6}$$

$$0c_1 + 0c_2 = \frac{-10x+4y+6z}{6} \rightarrow 0 = \frac{-10x+4y+6z}{6} \; -10x+4y+6z=0$$

$-10x+4y+6z=0$ se puede reducir dividiendo entre menos dos, queda:

$5x - 2y - 3z=0$ es la ecuación de un plano en el espacio R^3.

En conclusión, los vectores $\mathbf{v}_1 = (2, -1, 4)$, $\mathbf{v}_2 = (4, 1, 6)$ generan un espacio vectorial en R^3.

4. Determine si los vectores $\mathbf{v}_1 = (1, -2, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (5, 6, -1)$ y $\mathbf{v}_t = (3, 2, 1)$ forman un conjunto linealmente dependiente o linealmente independiente.

Solución:

Para que los vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ sean linealmente independientes, se debe cumplir que su combinación lineal sea igual a cero.

$$c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + c_3\mathbf{v_3} = \mathbf{0}$$

$$c_1(1,2,-3) + c_2(5,6,-1) + c_3(3,2,1) = (0,0,0)$$

$$(c_1+5c_2+3c_3, 2c_1+6c_2+2c_3, -3c_1-c_2+c_3) = (0,0,0)$$

Formando el sistema de ecuaciones:

$$c_1+5c_2+3c_3 = 0$$

$$2c_1+6c_2+2c_3 = 0$$

$$-3c_1-c_2+c_3 = 0$$

Resolviendo el sistema para ver cómo son los coeficientes c_1, c_2 y c_3.

Se construye la matriz aumentada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Se efectúan operaciones en fila para reducirla, quedando:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & {}^{1}_{2} & 0 \\ 0 & 1 & {}^{1}_{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$1c_1 + 0c_2 + \frac{1}{2}\, c_3 = 0 \;\rightarrow\; c_1 = -\, \frac{1}{2}\, c_3$

$0c_1 + 1c_2 + \frac{1}{2}\, c_3 = 0 \;\rightarrow\; c_2 = -\, \frac{1}{2}\, c_3$

$0c_1 + 0c_2 + 0c_3 = 0 \;\rightarrow\; 0(-\,\frac{1}{2})c_3 + 0(-\,\frac{1}{2})c_3 + \;\; 0c_3 = 0 \;\rightarrow c_3 = t$

Luego, c_1 y c_2 son variables ligadas y c3 es la variable libre.

La existencia de variables ligadas implica que los vectores $\mathbf{v_1}$ = (1, -2, 3), $\mathbf{v_2}$ = (5, 6, -1) y $\mathbf{v_3}$ = (3, 2, 1) forman un conjunto linealmente dependiente.

5. Determine si los vectores $\mathbf{v_1}$ = (1, -2, 3), $\mathbf{v_2}$ = (2, -2, 0), $\mathbf{v_3}$ = (0, 1, 7) son linealmente dependientes o independientes.

Solución:

Para que los vectores $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, $\mathbf{v_3}$ sean linealmente independientes, se debe cumplir que su combinación lineal sea igual a cero.

$c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + c_3\mathbf{v_3} = \mathbf{0}$

$c_1(1, -2, 3) + c_2(2, -2, 0) + c_3(0, 1, 7) = (0,0,0)$

$(c_1+2c_2+0c_3, -2c_1-2c_2+c_3, 3c1 + 0c_2+ 7c_3) = (0,0,0)$

Formando el sistema de ecuaciones

$c_1+2c_2+0c_3 = 0$

$-2c_1-2c_2+1c_3 = 0$

$3c_1+0c_2+7c_3 = 0$

Resolviendo el sistema para ver cómo son c_1, c_2 y c_3.

Se construye la matriz aumentada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

Se efectúan operaciones en fila para reducirla, quedando:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{lcl} 1c_1 + 0c_2 + 0c_3 = 0 & \rightarrow & c_1 = 0 \\ 0c_1 + 1c_2 + 0c_3 = 0 & \rightarrow & c_2 = 0 \\ 0c_1 + 0c_2 + 1c_3 = 0 & \rightarrow & c_3 = 0 \end{array}$$

La existencia de $c_1=c_2=c_3=0$ implica que los vectores $\mathbf{v_1}= (1, -2, 3)$, $\mathbf{v_2} = (2, -2, 0)$, $\mathbf{v_3} = (0, 1, 7)$ forman un conjunto linealmente independiente.

6. Demuestre que el conjunto de vectores $\mathbf{v_1}=(1, 2, 1)$, $\mathbf{v_2}=(2, 9, 0)$ y $\mathbf{v_3}=(3, 3, 4)$ es una base para R^3.

Solución:

$c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + c_3\mathbf{v_3}=\mathbf{0}$

$c_1(1, 2, 1) + c_2(2, 9, 0) + c_3(3, 3, 4)=0$

$1c_1+2c_2+3c_3=0$

$2c_1+9c_2+3c_3=0$

$1c_1+0c_2+4c_3=0$

Resolviendo el sistema:

Se construye la matriz aumentada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 9 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Se efectúan operaciones en fila para reducirla, quedando:

$$\begin{aligned} 1c_1 + 0c_2 + 0c_3 = 0 &\quad \rightarrow \quad c_1 = 0 \\ 0c_1 + 1c_2 + 0c_3 = 0 &\quad \rightarrow \quad c_2 = 0 \\ 0c_1 + 0c_2 + 1c_3 = 0 &\quad \rightarrow \quad c_3 = 0 \end{aligned}$$

La existencia de $c_1=c_2=c_3=0$ implica que los vectores $\mathbf{v_1}$ = (1, 2, 1), $\mathbf{v_2}$ = (2, 9, 0) y $\mathbf{v_3}$=(3, 3, 4) forman un conjunto linealmente independiente.

Luego, el conjunto de vectores $\mathbf{v_1}$=(1, 2, 1), $\mathbf{v_2}$=(2, 9, 0) y $\mathbf{v_3}$=(3, 3, 4) es una base para R^3.

7. Halle la dimensión y la base en R^3 para el conjunto de vectores que están en el plano 2x-y-z=0.

Solución:

El conjunto de vectores que están en el plano 2x-y-z=0 sugiere un sub espacio $S=\{(x, y, z) \in R^3 \ / \ 2x-y-z=0\}$.

Hallando la base.

$$2x-y-z=0 \quad \rightarrow \quad z = 2x - y$$

Un vector cualquiera de S es:

$(x, y, z) = (x, y, 2x - y)$

$(x, y, z) = (0, y, 2(0) - y) + (x, 0, 2x - (0))$

$(x, y, z) = (0, y, y) + (x, 0, 2x)$

$(x, y, z) = y(0, 1, 1) + x(1, 0, 2)$

Luego, los vectores (0, 1, 1) y (1, 0, 2) forman una base de S.

A continuación se halla la dimensión de S.

Se observa que la base tiene dos vectores: (0, 1, 1) y (1, 0, 2).

Luego, la dimensión de S es dos.

Dim(S)=2.

8 Determine el núcleo y el rango del operador lineal $T(x, y, z) = (x, y, 0)$

Solución:

Puesto que el operador lineal T transforma R^3 en R^3, el núcleo y el rango serán sub espacios de R^3.

Por definición, el núcleo ker(T) es el subconjunto transformado en (0, 0, 0).

$T(x, y, z) = (x, y, 0) \quad \wedge \quad T(x, y, z) = (0, 0, 0)$

$(x, y, 0) = (0, 0, 0)$

$x=0$

$y=0$

$\ker(T) = \{(0, 0, z)\}$

Este conjunto de vectores es el núcleo de T.

Se observa en $\{(0, 0, z)\}$ que el núcleo es un conjunto de vectores que se ubican en el eje z.

Por definición del problema, el rango de T es el conjunto de vectores que satisfacen la transformación lineal $T(x, y, z) = (x, y, 0)$.

$R(T) = \{(x, y, 0)\}$

Este conjunto de vectores es el rango de T.

Se observa en $\{(x, y, 0)\}$ que el rango es un conjunto de vectores que se ubican en el plano xy.

9. Determine el núcleo y el rango de la transformación definida por la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Solución:

A es una matriz de 3x 3.

De esta manera, A define un operador lineal $T: R_3 \rightarrow R_3$.

$T(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x})$

Los elementos de R^3 se expresan en forma de matriz columna para poder efectuar la multiplicación de matrices.

Hallando el núcleo:

El núcleo constará de todos los vectores $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ en R^3, tales que

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

Así,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esta ecuación matricial corresponde al siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 1x_1 - 1x_2 + 1x_3 &= 0 \\ 1x_1 + 1x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Al resolver este sistema, se obtienen varias soluciones:

$$\begin{aligned} x_1 &= -5r \\ x_2 &= r \\ x_3 &= r \end{aligned}$$

Luego, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = (-5r, r, r) = r(-5, 1, 1)$ en R^3.

El conjunto de vectores $\{ r(-5, 1, 1)\}$ es un sub espacio unidimensional de R^3 cuya base es $(-5, 1, 1)$.

El núcleo es el conjunto de vectores de la forma r(-5, 1, 1)

Ker(T) = {(-5r, r, r)}

Hallando el rango:

Trabajando con la transpuesta de A para generar el rango:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Reduciendo a la forma escalonada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los vectores (1, 0, 1) y (0, 1, 1) generan el rango de T.

Cualquier vector del rango es una combinación lineal de estos vectores.

s(1, 0,1) + t(0, 1, 1)

El conjunto de vectores { s(1, 0,1) + t(0, 1, 1) } es un sub espacio bidimensional de R3, cuyas bases son {(1, 0, 1), (0, 1, 1)}.

Por lo tanto, el rango de T es:

R(T) = {(s, t, s + t)}

10. Considere las bases B = {(1, 2), (3, -1)] y B' = [(3,1), (5, 2)] de R^2.

Encuentre la matriz de transición de B a B'.

Si **u** es un vector tal que $\mathbf{u}_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.Determine $\mathbf{u}_B$'.

Solución:

Utilice la base canónica S = [(1, 0), (0, 1)].

La matriz de transición P de B a S es:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

La matriz de transición P' de B' a S es:

$$P' = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Por definición, la matriz de transición de S a B' es $(P')^{-1}$.

Y la matriz de transición de B a B' por vía de S es $(P')^{-1}P$.

Por lo tanto, la matriz de transición de B a B' es.

$$(P')^{-1} P = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -8 & 1 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_{B'} = (P')^{-1} P\mathbf{u}_B$$

$$\mathbf{u}_{B'} = \begin{bmatrix} -8 & 1 \\ 5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_{B'} = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Diga si el conjunto de todas las matrices triangulares superiores de orden 3x3 es un espacio vectorial.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$$

2. Demuestre que el conjunto $S = \{(x, y, z) \in R^3 \,/\, x + y = 3z\}$ es un espacio vectorial.

3. Sea $V= R^3$, $S = \{(x, y, z) \in R^3 \,/\, z = x + y\}$, ¿es un sub espacio vectorial de V?

4. Diga si el siguiente sub conjunto $M_n(R)$ es un sub espacio vectorial U.

$$U = \{A \in M_n(R) \,/\, A^2 = A\}$$

5. Verifique que los vectores $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v} = (0, 1, 2)$ y $\mathbf{w} = (0, 0, 1)$ generan R^3.

6 ¿Cuáles de estas opciones son combinaciones lineales de $\mathbf{u} = (1, -1, 3)$ y $\mathbf{v} = (2, 4, 0)$?

(a) (3, 3, 3)   (b) (4, 2, 6)   (c) (1, 5, 6)   (d) (0, 0, 0)

7. Verifique si los vectores $\mathbf{v}_1 = (3, 1, 4)$, $\mathbf{v}_2 = (2, -3, 5)$, $\mathbf{v}_3 = (5, -2, 9)$, y $\mathbf{v}_4 = (1, 4, -1)$ generan a R3.

8. Diga si son independientes los polinomios $\mathbf{p}_1 = 1+x$, $\mathbf{p}_2 = x^2 + x^3$, y $\mathbf{p}_3 = - 2 - 2x + 3x2 + 3x3$ en P^3.

9. Halle una base en R^3 y su dimensión si:

$$S=\{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 / 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\}$$

10. Sea la transformación lineal $T: R^3 \rightarrow R^3$ definida por $T(x, y, z) = (x+2y - z, y + z, x + y - 2z)$, halle:

(a) El núcleo de T (b) La imagen de T

11. Halle la representación matricial canónica de la transformación lineal.

(a) $T: R^3 \rightarrow R^3$ con $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2 - x_3, -x_1 - x_2 + x_3)$

(b) $T: R^3 \rightarrow R^4$ con $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_1, x_1 + x_2 + x_3)$

Respuesta:

La representación matricial canónica de T es:

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

12. Halle la matriz de cambio de base si:

B=[(1,1,1,1),(1,1,1,0),(1,1,0,0),(1,0,0,0)]

B'=[(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)]

(a) De B a B' (b) De B' a B

Respuesta:

La matriz de cambio de base es:

$$(a)\ A_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (b)\ A_T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

13. Verifique si H es lineal para H: $R^2 \rightarrow R^2$.

a) $H(x,y)=(2x+y, x-y)$
b) $H(x,y)=(x^2, y)$

Respuestas: a) Lineal b) No lineal

14. Verifique si H es lineal para H: $R^3 \rightarrow R^2$.

a) $H(x, y, z)=(1, 1)$
b) $H(x, y, z)=(2x+y, 3y-4z)$

Respuestas: a) No lineal b) Lineal

15. Verifique si H es lineal para H: $M_{22} \rightarrow R$.

a) $H\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)=2a + 3b + c - d$

b) $H\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)=a^2 + b^2$

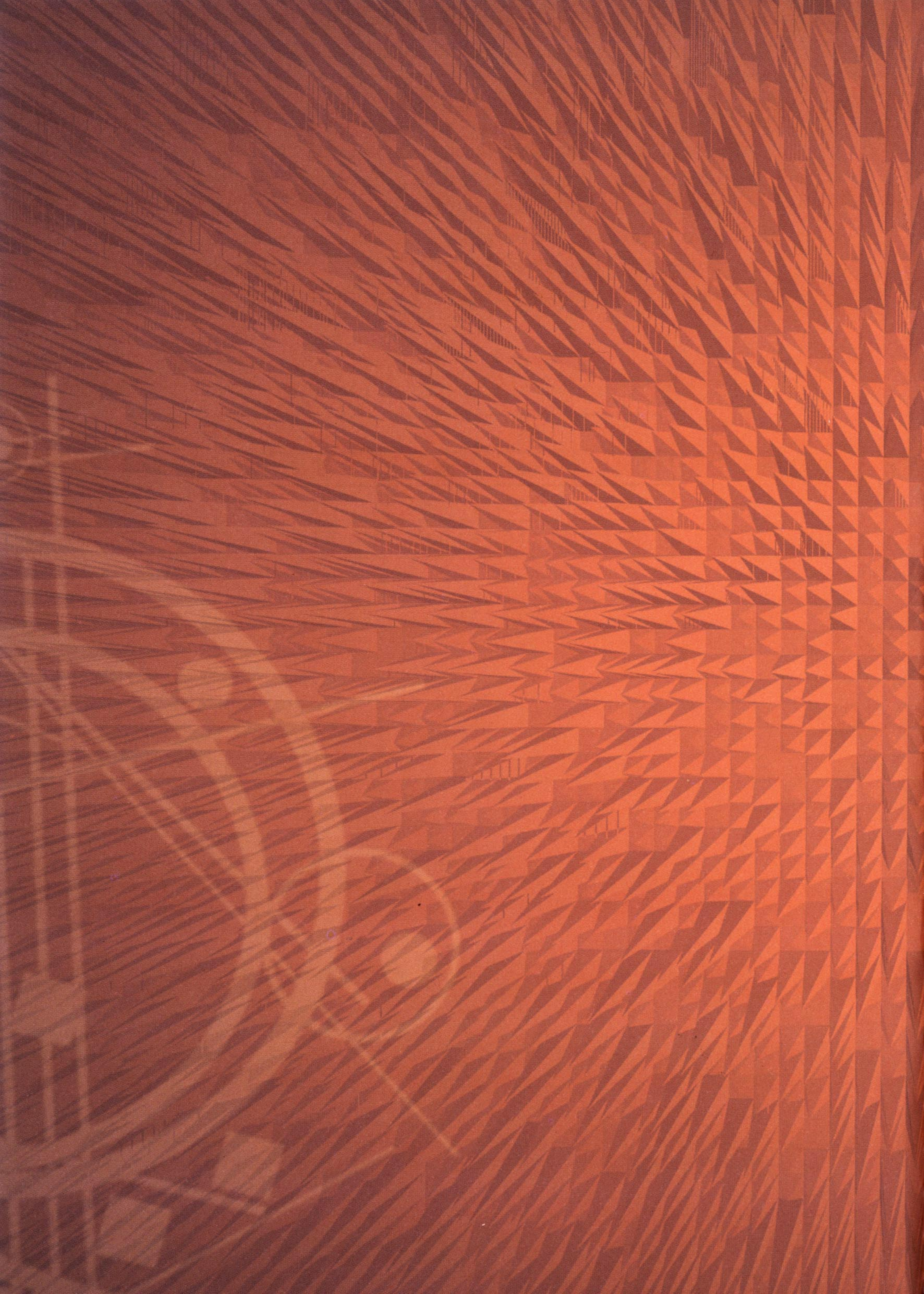
Respuestas: a) Lineal b) No lineal

16. Verifique si H es lineal para $H: P_2 \rightarrow P_2$.

a) $H(a_0 + a_1x + a_2x^2)=0$
b) $H(a_0 + a_1x + a_2x^2)=(a_0+1) + a_1x + a_2x^2$

Respuestas: a) Lineal b) No lineal

¿Sabías que el Tecnecio (43) y el Promethium (61) son los únicos elementos radiactivos con número atómico menor a 84, número a partir del cual todos son radiactivos?



V Unidad Didáctica

Autovectores y autovalores
Diagonalización de matrices

Introducción

Se ha visto que una transformación lineal es una función cualquiera con valor vectorial de una variable vectorial. Y que se puede utilizar en algún modelo en el que las entradas a algunos procesos se transforman en salidas. Por ejemplo, se puede visualizar cómo los datos de precios y producción se transforman en una estructura de ganancias.

Ahora, los conceptos de autovectores y autovalores se aplican a una transformación lineal de cualquier espacio vectorial en sí mismo. Es decir, una transformación lineal $T: V \rightarrow V$. Donde V es un espacio vectorial de dimensión finita.

5.1. Definición de autovalores y autovectores

Sea A una matriz de n x n. Se dice que un escalar λ es un autovalor o valor propio de A si existe en Rn un vector **x**, distinto de cero, tal que:

$$A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$

El vector x es el autovector o vector propio correspondiente a λ .

5.1.1. Modo práctico de encontrar los autovalores y autovectores

Sea A una matriz de n x n con el autovalor λ y su correspondiente autovector **x**.

Por lo tanto, $A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$.

Esta ecuación se reescribe como $A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Lo que nos da $(A - \lambda I_n)\mathbf{x} = 0$.

Esta ecuación matricial representa un sistema de ecuaciones lineales en el que la matriz de coeficientes es $(A - \lambda I_n)$.

Una solución de este sistema es $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.Sin embargo, se definieron los autovectores como vectores distintos de cero.

Este sistema tiene soluciones distintas de cero sólo si la matriz de coeficientes es singular, es decir $|A - \lambda I_n| = 0$.

Al resolver la ecuación $|A - \lambda I_n|=0$ para λ, se encuentran los autovalores de A.

Al resolver el determinante $\lambda | A - \lambda I_n |$, se obtiene un polinomio en λ . A este polinomio se le llama polinomio característico de A.

La ecuación $| A - \lambda I_n | = 0$ se llama ecuación característica de A.

Al sustituir los autovalores en la ecuación $(A - \lambda)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, se encuentran los autovectores correspondientes.

Ejemplo 1:

Encuentre los autovalores y los autovectores de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Solución:

Se obtiene primero el polinomio característico de A. Así:

$$A - \lambda I_2 = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4-\lambda & -6 \\ 3 & 5-\lambda \end{bmatrix}$$

Observe que la matriz $A - \lambda I_2$ se obtiene restando λ a los elementos diagonales de A.

El polinomio característico de A es:

$$|A - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} -4-\lambda & -6 \\ 3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (-4-\lambda)(5-\lambda)+18 = \lambda^2 - \lambda - 2$$

Ahora se resuelve la ecuación característica de A:

$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$

$(\lambda-2)(\lambda+1) = 0$

$\lambda = 2$ ó -1

Los autovalores de A son 2 y -1.

Al usar estos valores de λ en la ecuación $(A - \lambda I2)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ se encuentran los autovectores correspondientes.

Usando $\lambda = 2$ resuelva la ecuación $(A - 2I_2)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ para x. La matriz $(A - 2I_2)$ se obtiene restándole 2 a los elementos de la diagonal de A. Se tiene:

$$(A - 2I_2) = \begin{bmatrix} -4-\lambda & -6 \\ 3 & 5-\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4-2 & -6 \\ 3 & 5-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -6 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$(A - 2I_2)\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$$\begin{bmatrix} -6 & -6 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Esto conduce al siguiente sistema de ecuaciones:

$-6x_1 - 6x_2 = 0$
$3x_1 + 3x_2 = 0$

De donde se obtiene $x_1 = -x_2$.

Las soluciones de este sistema de ecuaciones son $x_1 = -r$ y $x_2 = r$, donde r es un escalar.

Por lo tanto, los vectores propios de A que corresponden a $\lambda=2$ son los vectores distintos de cero de la forma.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Usando $\lambda = -1$ resuelva la ecuación $(A + I_2)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ para **x**. La matriz $(A + I_2)$ se obtiene restándole 1 a los elementos de la diagonal de A.

$$(A + I_2) = \begin{bmatrix} -4+1 & -6 \\ 3 & 5+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$(A + I_2)\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$$\begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Esto conduce al siguiente sistema de ecuaciones:

$-3x_1 - 6x_2 = 0$
$3x_1 + 6x_2 = 0$

De donde se obtiene $x_1 = -2x_2$.

Las soluciones de este sistema de ecuaciones son $x_1 = -2s$ y $x_2 = s$, donde s es un escalar.

Por lo tanto, los vectores propios de A que corresponden a $\lambda=-1$ son los vectores distintos de cero de la forma:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

5.2. Bases ortogonales y ortonormales

5.2.1. Definición de bases ortogonales

Una base ortogonal es una base formada por vectores ortogonales.

Un conjunto S de vectores en V se dice ortogonal si cada par de vectores en S lo son.

$S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r\}$ es ortogonal si $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0$ para $i \neq j$

Ejemplo 2:

Sea $S = \{(1, 1, 1, 1), (-1, -1, 1, 1), (-1, 1, -1, 1), (-1, 1, 1, -1)\}$ de R^4.

Verifique si S es ortogonal.

Solución:

Por definición, un conjunto S de vectores en V se dice ortogonal si cada par de vectores en S lo son.

Trabajando con el producto punto de cada par:

i) (1, 1, 1, 1).(-1, -1, 1, 1) = 0
ii) (1, 1, 1, 1).(-1, 1, -1, 1) = 0
iii) (1, 1, 1, 1).(-1, 1, 1, -1) = 0
iv) (-1, -1, 1, 1).(-1, 1, -1, 1 = 0
v) (-1, -1, 1, 1).(-1, 1, 1, -1) = 0
vi) (-1, 1, -1, 1).(-1, 1, 1, -1) = 0

Se concluye que S = {(1, 1, 1, 1), (-1, -1, 1, 1), (-1, 1, -1, 1), (-1, 1, 1, -1)} es ortogonal.

5.2.2. Definición de bases ortonormales

Una base ortonormal es una base formada por vectores ortonormales.

Un conjunto S de vectores en V se dice ortonormal si es ortogonal y cada vector de S tiene longitud unidad.

$$S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r\} \text{ es ortonormal si } \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ para } i \neq j \\ 1 \text{ para } i = j \end{cases}$$

Ejemplo 3:

Sea el conjunto S = {(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)} de R^3. Verifique que S es ortonormal.

Solución:

Un conjunto S de vectores en V se dice ortonormal si es ortogonal y cada vector de S tiene longitud unidad.

Primero, se verifica si S es ortogonal. Trabajando con el producto punto de cada par:

i) $(1, 0, 0).(0, 1, 0) = 0$
ii) $(1, 0, 0).(0, 0, 1) = 0$
iii) $(0, 1, 0). (0, 0, 1) = 0$

Luego, S es ortogonal.

Segundo, se verifica si la norma de cada vector de S es la unidad:

i) $||(1, 0, 0)|| = 1$
ii) $||(0, 1, 0)|| = 1$
iii) $||(0, 0, 1)|| = 1$

Luego, la norma de cada vector es la unidad.

En conclusión, el conjunto $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ es ortonormal.

5.2.3. Normalización de un conjunto S ortogonal

Un conjunto S ortogonal se puede transformar en ortonormal dividiendo cada vector de S entre su propia norma.

Ejemplo 4:

Sea $S = \{(1, 1, 1, 1), (-1, -1, 1, 1), (-1, 1, -1, 1), (-1, 1, 1, -1)\}$ un conjunto ortogonal de R^4. Transforme S en un conjunto ortogonal normalizado.

Solución:

Por definición, un conjunto S ortogonal se puede normalizar dividiendo cada vector de S entre su propia norma.

Primero, se verifica que s es ortogonal. En este caso particular, ya se verificó en el ejemplo anterior.

Segundo, se calcula la norma de cada vector.

$(1, 1, 1, 1) \rightarrow 2$
$(-1, -1, 1, 1) \rightarrow 2$
$(-1, 1, -1, 1) \rightarrow 2$
$(-1, 1, 1, -1) \rightarrow 2$

Tercero, se divide cada vector entre su norma.

$(1, 1, 1, 1) \rightarrow (1, 1, 1, 1)/ 2 \rightarrow (0.707, 0.707, 0.707, 0.707)$
$(-1, -1, 1, 1) \rightarrow (-1, -1, 1, 1)/ 2 \rightarrow (-0.707, -0.707, 0.707, 0.707)$
$(-1, 1, -1, 1) \rightarrow (-1, 1, -1, 1)/ 2 \rightarrow (-0.707, 0.707, -0.707, 0.707)$
$(-1, 1, 1, -1) \rightarrow (-1, 1, 1, -1)/ 2 \rightarrow (-0.707, 0.707, 0.707, -0.707)$

Luego, el conjunto S normalizado es:

$\{(0.707, 0.707, 0.707, 0.707), (-0.707, -0.707, 0.707, 0.707),$
$(-0.707, 0.707, -0.707, 0.707), (-0.707, 0.707, 0.707, -0.707)\}$

Donde el conjunto S normalizado es un conjunto ortonormal.

5.2.4. Proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt en R^n.

Sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base de un espacio con producto punto V. Se puede construir una base ortogonal $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ de V como sigue.

Se toma:

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{v_2.w_1}{|w_1|^2}\mathbf{w}_1$$

$$\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{v_3.w_1}{|w_1|^2}\mathbf{w}_1 - \frac{v_3.w_2}{|w_2|^2}\mathbf{w}_2$$

$$\mathbf{w}_n = \mathbf{v}_n - \frac{v_n.w_1}{|w_1|^2}\mathbf{w}_1 - \frac{v_n.w_2}{|w_2|^2}\mathbf{w}_2 - \ldots - \frac{v_n.w_{n-1}}{|w_{n-1}|^2}\mathbf{w}_{n-1}$$

Dicho de otro modo, para k = 2, 3,…, n, se define:

$$\mathbf{w}_k = \mathbf{v}_k - \frac{v_k.w_1}{|w_1|^2}\mathbf{w}_1 - \frac{v_k.w_2}{|w_2|^2}\mathbf{w}_2 - \ldots - \frac{v_k.w_{k-1}}{|w_{k-1}|^2}\mathbf{w}_{k-1}$$

Cada $\mathbf{w}_k$ es ortogonal a los precedentes, de modo que los vectores $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ forman una base ortogonal de V.

La normalización de cada $\mathbf{w}_k$ proporcionará una base ortonormal de V.

Ejemplo 5:

Sea el sub espacio U de R^4 generado por

$\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1, 1)$ $\mathbf{v}_2 = (1, 2, 4, 5)$ $\mathbf{v}_3 = (1, -3, -4, -2)$. Halle una base ortogonal mediante el algoritmo de Gram-Schmidt.

Solución:

Se toma:

$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 = (1, 1, 1, 1)$

$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \dfrac{v_2 . w_1}{| w_1 |^2} \mathbf{w}_1 = (1, 2, 4, 5) - \dfrac{(1,2,4,5).(1,1,1,1)}{| (1,1,1,1) |^2}$
$(1, 1, 1, 1) = (-2, -1, 1, 2)$

$$\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{v_3 . w_1}{| w_1 |^2} \mathbf{w}_1 - \frac{v_3 . w_2}{| w_2 |^2} \mathbf{w}_2$$

$\mathbf{w}_3 = (1,-3,-4,-2) - \dfrac{(1,-3,-4,-2).(1,1,1,1)}{| (1,1,1,1) |^2} (1,1,1,1) - \dfrac{(1,-3,-4,-2).(-2,-1,1,2)}{| (-2,-1,1,2) |^2}$
$(-2,-1,1,2)$

$$\mathbf{w}_3 = (\frac{8}{5}, -\frac{17}{10}, -\frac{13}{10}, \frac{7}{5}) = \frac{1}{10} (16, -17, -13, 14)$$

5.2.5. Producto interno, norma y vectores ortogonales en otros espacios vectoriales diferentes de R^n.

El producto punto fue el concepto fundamental de R^n que llevó a las definiciones de norma, ángulo y distancia.

Ahora se enfocará el producto punto de R^n a un espacio vectorial general con una estructura matemática llamada producto interno. Éste, a su vez, será de utilidad para definir la norma, el ángulo y la distancia en un espacio vectorial general.

5.2.5.1. Producto interno en un espacio vectorial real V

Es una función que asocia un número, se denota por $< \mathbf{u}, \mathbf{v} >$, con cada par de vectores **u** y **v** de V. Esta función debe satisfacer los axiomas siguientes para los vectores **u**, **v** y **w**, y el escalar c.

a) $< \mathbf{u}, \mathbf{v}> = < \mathbf{v}, \mathbf{u} >$
b) $< \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} > = < \mathbf{u}, \mathbf{w} > + < \mathbf{v}, \mathbf{w} >$
c) $< c\mathbf{u}, \mathbf{v} > = c< \mathbf{u}, \mathbf{v} >$
d) $< \mathbf{u}, \mathbf{u}> \geq 0$, y $< \mathbf{u}, \mathbf{u} > = 0$ si y sólo si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$

Un espacio vectorial V sobre el que se define un producto interno recibe el nombre de espacio con producto interno.

Ejemplo 6:

Sean $\mathbf{u}=(x_1, x_2)$, $\mathbf{v}=(y_1,y_2)$ y $\mathbf{w}=(z_1,z_2)$ vectores cualesquiera en R^2. Verifique que $<\mathbf{u},\mathbf{v}>$ definido de la manera siguiente, es un producto interno en R^2.

$$<\mathbf{u},\mathbf{v}> = x_1y_1 + 4x_2y_2$$

Determine el producto interno de los vectores (-2, 5), (3, 1) con este producto interno.

Solución:

Comprobando cada uno de los cuatro axiomas del producto interno.

Primer axioma: $<\mathbf{u}, \mathbf{v}> = <\mathbf{v}, \mathbf{u}>$
$<\mathbf{u}, \mathbf{v}> = x_1y_1 + 4x_2y_2$
$<\mathbf{u}, \mathbf{v}> = y_1x_1 + 4y_2x_2$
$<\mathbf{u}, \mathbf{v}> = <\mathbf{v}, \mathbf{u}>$

Segundo axioma $<\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}> = <\mathbf{u}, \mathbf{w}> + <\mathbf{v}, \mathbf{w}>$
$<\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}> = <\mathbf{cu}, \mathbf{v}> = c<\mathbf{u}, \mathbf{v}>, (z_1,z_2)>$
$<\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}> = <(x_1 + y_1, x_2+y_2), (z_1,z_2)>$
$<\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}> = (x_1 + y_1) z_1 + 4(x_2+y_2)z_2$
$<\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}> = x_1z_1 + y_1z_1 + 4x_2z_2 + 4y_2z_2$
$<\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}> = x_1z_1 + 4x_2z_2 + y_1z_1 + 4y_2z_2$
$<\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}> = <(x_1, x_2), (z_1, z_2)> + <(y_1, y_2), (z_1, z_2)>$
$<\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}> = <\mathbf{u}, \mathbf{w}> + <\mathbf{v}, \mathbf{w}>$

Tercer axioma $<\mathbf{cu}, \mathbf{v}> = c<\mathbf{u}, \mathbf{v}>$
$<\mathbf{cu}, \mathbf{v}> = <c(x_1, x_2), (y_1, y_2)>$
$<\mathbf{cu}, \mathbf{v}> = <(c\,x_1,c\,x_2), (y_1, y_2)>$
$<\mathbf{cu}, \mathbf{v}> = cx_1y_1 + 4cx_2y_2$
$<\mathbf{cu}, \mathbf{v}> = c(x_1y_1 + 4x_2y_2)$
$<\mathbf{cu}, \mathbf{v}> = c<\mathbf{u}, \mathbf{v}>$

Cuarto axioma $<\mathbf{u}, \mathbf{u}> \geq 0$, y $<\mathbf{u}, \mathbf{u}> = 0$ si y sólo si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$
$<\mathbf{u}, \mathbf{u}> = <(x_1, x_2), (x_1, x_2)>$
$<\mathbf{u}, \mathbf{u}> = x_1x_1 + 4x_2x_2$
$<\mathbf{u}, \mathbf{u}> = x_1^2 + 4x_2^2 \geq 0$

Los cuatro axiomas del producto interno se satisfacen.

Luego, $<\mathbf{u},\mathbf{v}> = x_1y_1 + 4x_2y_2$ es un producto interno en R^2.

Calculando el producto interno de los vectores (-2, 5) y (3, 1) es:

$$
\begin{aligned}
< \mathbf{u}, \mathbf{v}> = \quad & < (x_1, x_2), (y_1,y_2) > = x_1y_1 + 4x_2y_2 \\
& < (-2, 5), (3, 1) > \; = -2(3) + 4(5)(1) = 14
\end{aligned}
$$

Luego, el producto interno de los vectores (-2, 5) y (3, 1) es 14.

Ejemplo 7:

Sea el espacio vectorial M de matrices de 2 x 2, **u** y **v** matrices de 2 x 2 cualesquiera, definidas de la siguiente manera:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

Verifique que la función siguiente es un producto interno en M.

$$< \mathbf{u}, \mathbf{v} > = ae + bf + cg + dh$$

Calcule el producto interno de las matrices $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$

Solución:

Comprobando cada uno de los cuatro axiomas del producto interno.

Primer axioma: $< \mathbf{u}, \mathbf{v}> = < \mathbf{v}, \mathbf{u} >$

$< \mathbf{u}, \mathbf{v} > = ae + bf + cg + dh$

$< \mathbf{u}, \mathbf{v} > = ea + fb + gc + hd$

$< \mathbf{u}, \mathbf{v}> = < \mathbf{v}, \mathbf{u} >$

Segundo axioma: $< \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} > = < \mathbf{u}, \mathbf{w} > + < \mathbf{v}, \mathbf{w} >$
Queda para el participante.

Tercer axioma $< k\mathbf{u}, \mathbf{v} > = k< \mathbf{u}, \mathbf{v} >$

$< k\mathbf{u}, \mathbf{v} > = kae + kbf + kcg + kdh$

$< k\mathbf{u}, \mathbf{v} > = k(ae + bf + cg + dh)$

$< k\mathbf{u}, \mathbf{v} > = k< \mathbf{u}, \mathbf{v} >$

Cuarto axioma $< \mathbf{u}, \mathbf{u}> \geq 0$, y $< \mathbf{u}, \mathbf{u} > = 0$ si y sólo si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$
Queda para el participante.

Calculando el producto interno de las matrices dadas.

$$< \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} > = ae + bf + cg + dh$$

$$< \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 9 & 0 \end{bmatrix} > = (2)(5) + (-3)(2) + (0)(9) + (1)(0) = 4$$

Luego, el producto interno es 4.

5.2.5.2. Norma en un espacio vectorial real V

La norma de un vector en R^n se puede expresar en términos del producto punto de la manera siguiente:

$$||(x_1,..,x_n)|| = x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + \ldots + x_n^{\ 2} = (x_1,\ldots,x_n).(x_1,\ldots,x_n)$$

En la geometría euclidiana, esta definición de norma proporciona las normas esperadas para los vectores de posición en R^2 y R^3.

Para obtener la norma de un vector en un espacio vectorial general, esta definición se extenderá con la ayuda del producto interno en lugar del producto punto.

Así, las normas que se obtengan no necesariamente tienen interpretaciones geométricas, pero son importantes en los cálculos numéricos.

Sea V un espacio con producto interno. La norma de un vector **v** se denota por $||\mathbf{v}||$ y se define como:

$$||v|| = \ < v, v >$$

Ejemplo 8:

Sea el espacio vectorial P_n de polinomios con producto interno:

$$<f, g> = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

La norma de la función f generada por este producto interno es:

$$||f|| = \sqrt{<f,f>} = \sqrt{\int_0^1 [f(x)]^2 dx}$$

Halle la norma de la función f(x) = $5x^2 + 1$.

Solución:

Por definición del problema, $||f|| = \sqrt{<f,f>} = \sqrt{\int_0^1 [f(x)]^2 dx}$

$$||5x^2 + 1|| = \sqrt{\int_0^1 [5x^2+1]^2 dx} = \sqrt{\int_0^1 [25x^4+10x^2+1] dx} = \sqrt{\frac{28}{3}}$$

Luego, la norma de la función f(x) es $\sqrt{\frac{28}{3}}$

5.2.5.3. Ángulo para un espacio vectorial real V

El producto punto en R^n se utilizó para definir los ángulos entre vectores. El ángulo ϑ entre los vectores **u** y **v** en R^n se define como:

$$\text{Cos } \vartheta = \frac{<u,v>}{|u||||v|}$$

La definición de ángulo para un espacio vectorial real V utiliza la generalización del producto punto, que es el producto interno.

Sea V un espacio real con producto interno. El ángulo ϑ entre dos vectores distintos de cero **u** y **v** está dado por:

$$\text{Cos } \vartheta = \frac{< u, v >}{| u |||| v |}$$

Ejemplo 9:

Sea el espacio vectorial P_n de polinomios con producto interno:

$$<f, g> = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

Halle el coseno del ángulo entre las funciones $f(x)=5x^2$ y $g(x)=3x$.

Solución:

Por definición del problema, $<f, g> = \int_0^1 f(x)g(x)dx$

Aplicándola a la fórmula:

$$\text{Cos } \vartheta = \frac{< f, g >}{| f |||| g |} = \frac{\int_0^1 f(x)g(x)dx}{\| f \|\| g \|}$$

Calculando las normas:

$$||f|| = ||5x^2|| = \sqrt{\int_0^1 [5x^2]^2\,dx} = \sqrt{5}$$

$$||g|| = ||3x|| = \sqrt{\int_0^1 [3x]^2\,dx} = \sqrt{3}$$

Calculando el Cos ϑ :

$$\text{Cos}\,\vartheta = \frac{\int_0^1 (5x^2)(3x)\,dx}{\sqrt{5}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

Luego, el coseno del ángulo entre las funciones f y g es $\frac{\sqrt{15}}{4}$

5.2.5.4. Vectores ortogonales para un espacio vectorial real V

Sea V un espacio con producto interno. Dos vectores distintos de cero **u** y **v** en V se dice que son ortogonales si:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$$

Ejemplo 10:

Sean las funciones f(x)=3x-2 y g(x)=x. Verifique que son ortogonales en P_n con producto interno.

$$<f, g> = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

Solución:

Por definición del problema, $<f, g> = \int_0^1 f(x)g(x)dx$

$$<3x-2, x> = \int_0^1 (3x-2)(x)dx = [x^3 - x^2]_0^1 = 0$$

Luego, las funciones f y g son ortogonales en este espacio con producto interno.

5.2.6. Proceso de Gram-Schmidt en otros espacios diferentes de R^n

Sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base de un espacio con producto interno V. Se puede construir una base ortogonal $\{ \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n \}$ de V como sigue.

Se toma:

$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{< v_2, w_1 >}{|\ w_1\ |^2}\mathbf{w}_1$$

$$\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{< v_3, w_1 >}{|\ w_1\ |^2}\mathbf{w}_1 - \frac{< v_3, w_2 >}{|\ w_2\ |^2}\mathbf{w}_2$$

$$\mathbf{w}_n = \mathbf{v}_n - \frac{< v_n, w_1 >}{|\ w_1\ |^2}\mathbf{w}_1 - \frac{< v_n, w_2 >}{|\ w_2\ |^2}\mathbf{w}_2 - \dots - \frac{< v_n, w_{n-1} >}{|\ w_{n-1}\ |^2}\mathbf{w}_{n-1}$$

Dicho de otro modo, para k = 2, 3,..., n, se define:

$$\mathbf{w}_k = \mathbf{v}_k - \frac{< v_k, w_1 >}{|\ w_1\ |^2}\mathbf{w}_1 - \frac{< v_k, w_2 >}{|\ w_2\ |^2}\mathbf{w}_2 - \dots - \frac{< v_k, w_{k-1} >}{|\ w_{k-1}\ |^2}\mathbf{w}_{k-1}$$

Cada $\mathbf{w}_k$ es ortogonal a los precedentes, de modo que los vectores $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n$ forman una base ortogonal de V.

La normalización de cada $\mathbf{w}_k$ proporcionará una base ortonormal de V.

Ejemplo 11:

Sea V el espacio vectorial de los polinomios f(t) con producto interno:

$$<f,g> = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$$

Aplique el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt al conjunto$\{1, t, t^2, t^3\}$, con coeficientes enteros, del sub espacio U de los polinomios de grado ≤ 3. Aquí se usa el hecho de que si r+s=n,

$$<t^r,t^s> = \int_{-1}^{1} t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_{-1}^{+1} = \begin{cases} 2/(n+1) & \text{si n es par} \\ 0 & \text{si n es par} \end{cases}$$

Solución:

Se aplica el algoritmo o proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt al conjunto $\{1, t, t^2, t^3\}$.

Se empieza tomando $f_0 = 1$, calculando:

$$t - \frac{<t,1>}{<1,1>}.1 = t - \frac{0}{2}.1 = t$$

Tomando $f_1 = t$:

$$t^2 - \frac{<t^2,1>}{<1,1>}.1 - \frac{<t^2,t>}{<t,t>}.t = t^2 - \frac{2/3}{2}.1 - \frac{0}{2/3}.t = t^2 - 1/3$$

Multiplicando por 3 para llegar a $f_2 = 3t^2 - 1$.

Calculando f_3:

$$t^3 - \frac{<t^3,1>}{<1,1>}.1 - \frac{<t^3,t>}{<t,t>}.t - \frac{<t^3,3t^2-1>}{<3t^2-1,3t^2-1>}.(3t^2-1) = t^3 - 0x1 - \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}}.t$$

$$- 0(3t^2-1) = t^3 - \frac{3}{5}.t$$

Multiplicando por 5 para llegar a $f_3 = 5t^3 - 3t$

En conclusión, el conjunto $\{1, t, 3t^2-1, 5t^3 - 3t\}$ es la base ortogonal de U requerida.

5.3. Diagonalización de matrices

5.3.1. Transformaciones semejantes

Las transformaciones semejantes se presentan con frecuencia al aplicar el Álgebra Lineal en el contexto de sistemas de coordenadas relacionados.

Sean A y B matrices cuadradas del mismo orden. Se dice que B es similar o semejante a A, si existe una matriz invertible C tal que:

$$B = C^{-1}AC$$

A esta transformación de la matriz A en la matriz B se le llama transformación semejante.

Ejemplo 12:

Sean las matrices cuadradas A y C, C es invertible. Use la transformación semejante $C^{-1}AC$ para transformar la matriz A en una matriz B.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -10 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$B = C^{-1}AC$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 7 & -10 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -10 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -6 & -10 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se observa que la matriz A se transformó en una matriz diagonal B. Pero no todas se pueden diagonalizar de esta manera.

5.3.2. Matriz diagonalizable

Una matriz cuadrada A es diagonalizable si existe una matriz C tal que $D = C^{-1}AC$ es una matriz diagonal.

5.3.3. Verificación de una matriz diagonalizable

Sea A una matriz de n x n.

i) Si A tiene n vectores propios linealmente independiente, A es diagonalizable.

ii) Si A es diagonalizable, entonces, tiene 'n' vectores propios linealmente independientes.

Ejemplo 13:

Verifique si la matriz A es diagonalizable.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Solución:

La matriz de coeficientes del sistema lineal es $(A - \lambda I_2)$.

$$A - \lambda I_2 = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4-\lambda & -6 \\ 3 & 5-\lambda \end{bmatrix}$$

El polinomio característico de A es $|A - \lambda I_2|$.

$$|A - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} -4-\lambda & -6 \\ 3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (-4-\lambda)(5-\lambda) + 18 = \lambda^2 - \lambda - 2$$

Resolviendo la ecuación característica de A, $|A - \lambda I_2| = 0$.

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = 2 \text{ ó } -1$$

Los autovalores de A son 2 y -1.

Hallando los autovectores de A.

Con $\lambda = 2$ en la matriz de coeficientes $\begin{bmatrix} -4-\lambda & -6 \\ 3 & 5-\lambda \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -4-\lambda & -6 \\ 3 & 5-\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4-2 & -6 \\ 3 & 5-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -6 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

En la ecuación del sistema $(A - 2I_2)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

$$\begin{bmatrix} -6 & -6 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

De donde se obtiene $x_1 = -x_2$.

Un vector propio de A para λ=2 es:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \text{r} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Con λ= - 1 en la matriz de coeficientes $\begin{bmatrix} -4-\lambda & -6 \\ 3 & 5-\lambda \end{bmatrix}$ = (A + I_2)

$$\begin{bmatrix} -4-2 & -6 \\ 3 & 5-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -6 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

En la ecuación del sistema (A + 2I_2)**x** = **0**

$$\begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

De donde se obtiene x_1 = - 2x_2.

Un vector propio de A para λ= - 1 es:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \text{s} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Los autovalores son 2 y -1

Los autovectores son $r\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$ y $s\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$

Su combinación lineal sólo es cero cuando r y s son cero. Luego, dichos autovectores son linealmente independientes.

De acuerdo a la condición planteada al inicio de esta sección (5.3.3), la matriz

$A = \begin{bmatrix}-4 & -6\\3 & 5\end{bmatrix}$ tiene dos vectores propios $r\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$ y $s\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$

linealmente independientes; entonces, A es diagonalizable.

5.3.4. Proceso de diagonalización de una matriz cuadrada

Dada una matriz cuadrada A, el proceso es el siguiente:

- Se toman los 'n' vectores propios de A y se escriben en las columnas de C.
- La matriz C se utiliza en la transformación semejante $C^{-1}AC$ para dar una matriz diagonal D.
- Se comprueba que los elementos diagonales de D son los valores propios de A.

Ejemplo 14:

Halle la matriz diagonal de A:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Sabiendo que sus autovalores son 2 y -1.

Solución:

De acuerdo a la condición de la sección 5.3.4, los elementos diagonales de D son los valores propios de A.

Luego:

La matriz diagonal de A= $\begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ es $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Ejemplo 15:

Efectúe la transformación que diagonaliza a la matriz A

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Sabiendo que sus autovectores $r\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $s\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ son linealmente independientes.

Solución:

Construyendo la matriz diagonalizante C con los autovectores de A:

$$C = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Efectuando la transformación semejante $C^{-1}AC$:

$$C^{-1}AC = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C^{-1}AC = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C^{-1}AC = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Luego, la matriz diagonal de A es $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

5.3.5. Diagonalización ortogonal de una matriz simétrica

Dada una matriz simétrica A, el procedimiento de diagonalización ortogonal es el siguiente:

- Se hallan los autovalores.
- Se hallan los respectivos autovectores.
- Se ortogonalizan los vectores por el proceso de Gram-Schmidt obteniendo la matriz P.
- Se efectúa la transformación semejante P^TAP, la matriz resultante D es la matriz diagonal de A.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Encuentre los autovalores de la matriz A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$.

Solución:

La matriz de coeficientes del sistema lineal es (A - λ I_2).

$$A - \lambda I_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 4 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

El polinomio característico de A es | A - λ I_2 |.

$$|A - \lambda I2| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda) - 12 = \lambda 2 - 5\lambda - 6$$

Resolviendo la ecuación característica de A, | A - λ I_2 | = 0.

$$\lambda 2 - 5\lambda - 6 = 0 \rightarrow (\lambda - 6)(\lambda + 1) = 0 \rightarrow \lambda = 6 \text{ ó } -1$$

Los autovalores de A son 6 y -1.

2. Encuentre los autovectores de la matriz A = $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Sabiendo que sus autovalores son 2 y 3.

Solución:

Con $\lambda = 2$ en la matriz de coeficientes $\begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 \\ -1 & 1-\lambda \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 \\ -1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-2 & 2 \\ -1 & 1-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

En la ecuación del sistema $(A - 2I_2)\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

De donde se obtiene $x_1 = - x_2$.

Un vector propio de A para $\lambda = 2$ es:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Con $\lambda = 3$ en la matriz de coeficientes $\begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 \\ -1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (A + I_2)$

$$\begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 \\ -1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-3 & 2 \\ -1 & 1-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

En la ecuación del sistema $(A + I_2)\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

De donde se obtiene $x_1 = - 2x_2$.

Un vector propio de A para $\lambda = 3$ es:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Los autovalores son 2 y 3.

Los autovectores son $r \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. Transforme la base {(1, 0, 1), (2, -1, 1), (1, 2,1)} de R^3 a una base ortogonal por el proceso de Gram-Schmidt.

Solución:

Se toma:

$\mathbf{w_1} = \mathbf{v_1} = (1, 0, 1)$

$\mathbf{w_2} = \mathbf{v_2} - \frac{v_2 . w_1}{| w_1 |^2} \mathbf{w_1} = (2, -1, 1) - \frac{(2,-1,1).(1,0,1)}{| (1,0,1) |^2} (1, 0, 1) = (\frac{1}{2}, -1, - \frac{1}{2})$

$$\mathbf{w_3} = \mathbf{v_3} - \frac{v_3.w_1}{|\ w_1\ |^2}\ \mathbf{w_1} - \frac{v_3.w_2}{|\ w_2\ |^2}\ \mathbf{w_2}$$

$$\mathbf{w_3} = (1,\ 2{,}1) - \frac{(1{,}2{,}1).(1{,}0{,}1)}{|\ (1{,}0{,}1)\ |^2}\ (1,\ 0,\ 1) - \frac{(1{,}2{,}1).(\frac{1}{2},-1,-\frac{1}{2})}{|\ (\frac{1}{2},-1,-\frac{1}{2})\ |^2}\ (\ \frac{1}{2}\ ,\ -1,\ -\ \frac{1}{2}\ )$$

$$\mathbf{w_3} = (\ \frac{2}{3}\ ,\ \frac{2}{3}\ ,\ -\ \frac{2}{3}\ )$$

Luego, el conjunto de vectores $\{(1,\ 0,\ 1),\ (\ \frac{1}{2}\ ,\ -1,\ -\ \frac{1}{2}),\ (\ \frac{2}{3}\ ,\ \frac{2}{3}\ ,\ -\ \frac{2}{3}\ )\}$ es una base ortogonal de la base $\{(1,\ 0,\ 1),\ (2,\ -1,\ 1),\ (1,\ 2{,}1)\}$ de R^3.

4. Halle la base ortonormal de la base $\{(1,\ 0,\ 1),\ (2,\ -1,\ 1),\ (1,\ 2{,}1)\}$ de R^3 sabiendo que su base ortogonal es $\{(1,\ 0,\ 1),\ (\ \frac{1}{2}\ ,\ -1,\ -\ \frac{1}{2}\ ),\ (\ \frac{2}{3}\ ,\ \frac{2}{3}\ ,-\ \frac{2}{3}\ )\}$

   Solución:

   La normalización de cada vector de la base ortogonal:

   $\{(1,\ 0,\ 1),\ (\ \frac{1}{2}\ ,\ -1,\ -\ \frac{1}{2}\ ),\ (\ \frac{2}{3}\ ,\ \frac{2}{3}\ ,\ -\ \frac{2}{3}\ )\}$

   proporcionará una base ortonormal de R^3.

   Calculando la norma de cada vector de la base ortogonal:

   $$||(1,\ 0,\ 1)|| = \quad 1^2 + 0^2 + 1^2 \quad = \quad 2$$

   $$||(\ \frac{1}{2}\ ,\ -1,\ -\ \frac{1}{2})|| = \quad (\frac{1}{2})^2 + (-1)^2 + (-\frac{1}{2})^2 \quad = \quad \frac{6}{2}$$

   $$||(\ \frac{2}{3}\ ,\ \frac{2}{3}\ ,\ -\ \frac{2}{3})|| = \quad (\frac{2}{3})^2 + (\frac{2}{3})^2 + (-\frac{2}{3})^2 \quad = \quad \frac{2\ \ 3}{3}$$

Calculando el vector unitario de cada vector de la base ortogonal

Para (1, 0, 1):

$$\frac{1}{|(1,0,1)|}(1, 0, 1) = \frac{1}{2}(1, 0, 1)$$

Para $(\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2})$:

$$\frac{1}{|(\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2})|}(\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}) = \frac{1}{\frac{6}{2}}(\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}) = \frac{1}{6}(1, -2, -1)$$

Para $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$:

$$\frac{1}{|(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})|}(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}) = \frac{1}{2\frac{3}{3}}(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}) = \frac{1}{3}(1, 1, -1)$$

Luego, el conjunto de vectores $\{\frac{1}{2}(1, 0, 1), \frac{1}{6}(1, -2, -1), \frac{1}{3}(1, 1, -1)\}$ es una base ortonormal de la base {(1, 0, 1), (2, -1, 1), (1, 2,1)} de R^3.

5. Diagonalice la matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Solución:

La matriz de coeficientes del sistema lineal es (A - λ I_3).

$$A - \lambda I_3 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 0 & -5-\lambda & 6 \\ 0 & -3 & 4-\lambda \end{bmatrix}$$

El polinomio característico de A es $|A - \lambda I_3|$.

$$|A - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 0 & -5-\lambda & 6 \\ 0 & -3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-5-\lambda)(4-\lambda) + 18$$

Resolviendo la ecuación característica de A, $|A - \lambda I_2| = 0$.

$(1-\lambda)(-5-\lambda)(4-\lambda) + 18 = 0$

$(1-\lambda)(\lambda+2)(\lambda-1) = 0$

$\lambda = 1$ y 1 y -2.

Luego, los autovalores de $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ son 1, 1 y -2.

6. Halle los autovectores de A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Si sus autovalores son 1, 1 y -2.

Solución:

Con λ= -2 en la matriz de coeficientes $\begin{bmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 0 & -5-\lambda & 6 \\ 0 & -3 & 4-\lambda \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 0 & -5-\lambda & 6 \\ 0 & -3 & 4-\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & -3 & 3 \\ 0 & -5+2 & 6 \\ 0 & -3 & 4+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

En la ecuación del sistema $(A + 2I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Reduciendo $\begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & -3 & 6 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De donde se obtiene $x_2 = 2x_3 = 2s$, $x_1 = x_3 = s$.

Para λ = -2, consta de vectores de la forma:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ 2s \\ s \end{bmatrix}$$

Haciendo s=1 se obtiene el vector propio $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Con λ = 1 en la matriz de coeficientes $\begin{bmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 0 & -5-\lambda & 6 \\ 0 & -3 & 4-\lambda \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 0 & -5-\lambda & 6 \\ 0 & -3 & 4-\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-1 & -3 & 3 \\ 0 & -5-1 & 6 \\ 0 & -3 & 4-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

En la ecuación del sistema $(A - I_3)\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Reduciendo $\begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De donde se obtiene $x_2 = r$, $x_2 = x_3 = s$

Para $\lambda = 1$, consta de vectores de la forma:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ s \\ s \end{bmatrix}$$

Haciendo r=0, s=1 se obtiene el vector propio $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Haciendo r=1, s=0 se obtiene el vector propio $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Luego, los vectores propios de $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ son $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

7. Halle la matriz diagonal de A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Tome en cuenta que sus vectores propios son $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$

Solución:

Construyendo la matriz diagonalizante C con los tres vectores propios:

$$C = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 2\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

Efectuando la transformación semejante

$$C^{-1}AC = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 2\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix}1 & -3 & 3\\0 & -5 & 6\\0 & -3 & 4\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 2\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$C^{-1}AC = \begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\0 & 1 & -4\\0 & 1 & -2\end{bmatrix}$$

Luego, la matriz diagonal de $A = \begin{bmatrix}1 & -3 & 3\\0 & -5 & 6\\0 & -3 & 4\end{bmatrix}$ es $\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\0 & 1 & -4\\0 & 1 & -2\end{bmatrix}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.Halle los autovalores de la matriz $A = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Respuesta: Los autovalores son -3 y 2

2. Halle los autovectores de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -8 & 4 & -6 \\ 8 & 1 & 9 \end{bmatrix}$.

Respuesta: Los autovalores son 1, 6 y 7

3. Halle una base ortonormal por el proceso de Gram Schmidt para los vectores $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, -1)$, $\mathbf{v}_3 = (0, 3, 4)$.

Respuesta:

La base ortogonal es $\{(1, 0, 1), (1, 0, -1), (0, 3, 0)\}$

y la base ortonormal es $\{ \frac{1}{2}(1, 0, 1), \frac{1}{2}(1, 0, -1), \frac{1}{3}(0, 3, 0)\}$

4. Halle la matriz diagonal de $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$.

Respuesta: La matriz diagonal es $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. Halle la matriz diagonal de $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Respuesta: La matriz diagonal es $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

6. Diagonalice ortogonalmente la matriz $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$.

Respuesta: La matriz diagonal ortogonal es $\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

7. Encuentre las ecuaciones características de las siguientes matrices:

a) $\begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 10 & -9 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Respuestas:

a) $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$
b) $\lambda^2 + 3 = 0$
c) $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$
d) $\lambda^3 - 2\lambda = 0$
e) $(\lambda - 4)^2 (\lambda^2 + 3) = 0$

8. Halle los valores propios de las matrices del ejercicio 1.

Respuestas:

a) $\lambda = 4$
b) Ningún valor propio que pertenezca a los números reales
c) $\lambda = 1$
d) $\lambda = 2$
e) $\lambda = 4$

9. Halle las bases para los núcleos (eigenespacios) de las matrices del ejercicio 1.

Respuestas:

a) Si $\lambda = 4$, entonces, la base es $\begin{bmatrix} 3\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) No existen eigenespacios

c) Si $\lambda = 1$, entonces, la base es $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

d) Si $\lambda = 2$, entonces, la base es $\begin{bmatrix} -1\ 3 \\ -1\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

e) Si $\lambda = 4$, entonces, la base es $\begin{bmatrix} 3\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

10. Verifique si A es diagonalizable. Si lo es, halle una matriz P que diagonalice a A y obtenga $P^{-1}AP$.

a) $A=\begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Respuesta:

a) $P=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ $P^{-1}AP=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

b) No diagonalizable.

c) $P=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $P^{-1}AP=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

11. Halle una matriz P que diagonalice ortogonalmente a A y obtenga $P^{-1}AP$.

a) $\begin{bmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & -36 \\ 0 & -3 & 0 \\ -36 & 0 & -23 \end{bmatrix}$

Respuestas:

a) $P=\begin{bmatrix} 3\;5 & -4\;5 \\ 4\;5 & 3\;5 \end{bmatrix}$ $P^{-1}AP=\begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & -25 \end{bmatrix}$

b) $P=\begin{bmatrix} -4\;5 & 0 & 3\;5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3\;5 & 0 & 4\;5 \end{bmatrix}$ $P^{-1}AP=\begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -50 \end{bmatrix}$

¿Sabes el por qué los nombres de los días de la semana? Los antiguos veían en el firmamento siete luceros que cambiaban de constelación y que fueron bautizados como planetas por los griegos. Eran la Luna, Marte, Mercurio, Júpiter, Venus, Saturno y el Sol.

BIBLIOGRAFÍA

ANTON, HOWARD.
"Introducción al Algebra Lineal"
Editorial Limusa

BARBALLA, ROSA.
"Algebra Lineal y Teoría de Matrices"
Editorial Prentice Hall

BRU, RAFAEL.
"Algebra Lineal"
Editorial Alfaomega

FRALEIGH, JOHN B.
"Algebra Lineal"
Editorial Addison-Wesley

GROSSMAN, STANLEY I.
"Algebra Lineal"
Editorial McGraw-Hill

HILL, RICHARD.
"Algebra Lineal Elemental con Aplicaciones"
Editorial Prentice Hall

LIPSCHUTZ, SEYMOUR.
"Algebra Lineal"
Editorial McGraw-Hill

NOBLE, BEN.
"Algebra Lineal Aplicada"
Editorial Prentice-Hall Hispanoamericana

WILLIAMS, GARETH.
"Algebra Lineal con aplicaciones"
Editorial McGraw-Hill

FÓRMULAS ELEMENTALES

Álgebra elemental

* $a^2 – b^2 = (a+b)(a-b)$

* $a^{2n} – b^{2n} = (a^n+b^n)(a^n-b^n)$

* $a^3 – b^3 = (a-b)\ (a^2+ab+b^2)$

* a3 + b3 = (a+b) (a2-ab+b2)

* $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

* $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

* $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

* $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

* $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

* $ab + ac + ad = a(b+c+d)$

* $ax+ay+bx+by = (a+b)(x+y)$

* $c(a+b)+d(a+b)+e(a+b) = (a+b)(c+d+e)$

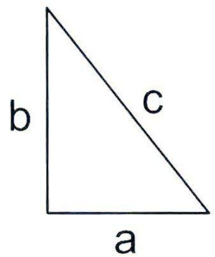
Propiedades de Potencias y Raíces

- $\mathbf{a^0 = 1}$
- $\mathbf{a^1 = a}$
- $\mathbf{a^2 = aa}$ a se multiplica a sí misma 2 veces

- $a^3 = aaa$ a se multiplica a sí misma 3 veces
- $a^n = aa\ldots aa$ a se multiplica a sí misma n veces
- $a^{-1} = \frac{1}{a}$
- $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$
- $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- $a^{1/2} = \sqrt[2]{a}$
- $a^{1/3} = \sqrt[3]{a}$
- $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$
- $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$
- $a^{m.n} = (a^m)^n$
- $a^{m+n} = (a^m)(a^n)$
- $am-n = \frac{a^m}{a^n}$
- $(\frac{b}{a})^n = \frac{b^n}{a^n}$
- $(\frac{b}{a})^{1/n} = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$
- $2a^m = a^m + a^m$
- $3a^m = a^m + a^m + a^m$
- $na^m = a^m + \ldots + a^m + a^m$

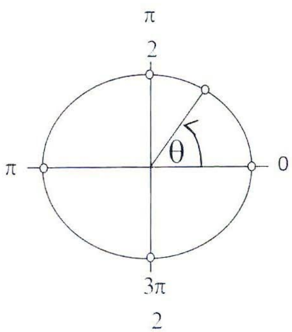
  a^m se suma a sí misma n veces

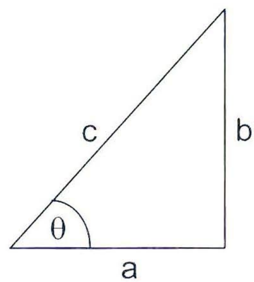
Teorema de Pitágoras



$$c^2 = a^2 + b^2$$

Trigonometría elemental





- $\text{Sen}\ \theta = \frac{b}{c}$
- $\text{Cos}\,\theta = \frac{a}{c}$
- $\text{Tan}\,\theta = \frac{b}{a}$
- $\text{Cot}\,\theta = \frac{1}{\text{Tan}\theta} = \frac{a}{b}$
- $\text{Sec}\ \theta = \frac{1}{\text{Cos}\theta} = \frac{c}{a}$

- $\text{Cosec}\,\theta = \frac{1}{Sen\theta} = \frac{c}{b}$
- $\text{Sen}^2\,\theta + \text{Cos}^2\,\theta = 1$
- $1 + \text{Cot}^2\,\theta = \text{Cosec}^2\,\theta$
- $\text{sen}\,(\pi - \theta) = \text{sen}\,\theta$
- $\cos\,(\pi - \theta) = \cos\theta$
- $\tan\,(\pi - \theta) = \tan\,\theta$
- $\text{sen}\,(\pi/2 + \theta) = \cos\theta$
- $\cos\,(\pi/2 + \theta) = \text{sen}\,\theta$
- $\tan\,(\pi/2 + \theta) = \text{ctg}\,\theta$
- $\text{sen}\,(\pi + \theta) = \text{sen}\,\theta$
- $\cos\,(\pi + \theta) = \cos\,\theta$
- $\tan\,(\pi + \theta) = \tan\,\theta$
- $\text{sen}\,(-\theta) = \text{sen}\,\theta$
- $\cos\,(-\theta) = \cos\,\theta$
- $\tan\,(-\theta) = \tan\,\theta$
- $\text{sen}\,2\,\theta = 2\,\text{sen}\theta\cos\theta$
- $\cos\,2\,\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta$

¿Sabías que una de las paradojas más antiguas es aquella del árabe que heredó a sus 3 hijos una cuadra de 17 caballos que habrían de repartir del siguiente modo: al mayor la mitad de los caballos, al segundo un tercio y al menor un noveno. Los herederos pidieron el consejo de un sabio pues no sabían como repartir los caballos sin llamar al carnicero. El sabio llevó un caballo de su propiedad y procedió al reparto. Siendo entonces 18 caballos, entregó 9 al mayor, 6 al segundo y 2 al menor? Habiendo entregado 17 caballos, tomó el suyo y se marchó.

Roberto Eduardo Miranda North

Desarrolla ingeniería de proyectos electrónicos y electromecánicos para los sectores minero, pesquero, comercial y municipal. Ingeniero residente de montaje de plantas industriales y comerciales con ingenieros canadienses, españoles y mexicanos.

Docente contratado de la Universidad Alas Peruanas con experiencia en la enseñanza de las asignaturas de matemáticas para ingeniería y de los cursos de línea de ingeniería electrónica.

Es Ingeniero Electrónico titulado y colegiado de la Universidad Nacional de Ingeniería con una Maestría en Administración y Dirección de Empresas de la Universidad Alas Peruanas.

Este libro se terminó de imprimir en los talleres
gráficos de la Universidad Alas Peruanas
Los Gorriones 264, Chorrillos
Lima- Perú
2014

Fondo Editorial

ÁLGEBRA LINEAL se desarrolla en cinco unidades didácticas: Matrices y determinantes; Sistema de ecuaciones lineales; Vectores en R^2, R^3 y R^n; Espacios y sub espacios vectoriales/transformaciones lineales, y, por último, Autovectores y autovalores/diagonalización de matrices.

Cada unidad didáctica cumple con el objetivo general y los objetivos específicos. Los contenidos disponen de información precisa, detallada, objetiva y sostensible los temas programados en un lenguaje sumamente denotativo.

Los contenidos más importantes son secuenciales en cada unidad. Se inicia con un esquema de contenidos sobre la matriz y sus operaciones. Las ecuaciones lineales, las formas algebraicas y matriciales para llegar a los vectores y tipos de sistemas. Definición y notación vectoriales en R^2, R^3 y sus propiedades. Los espacios vectoriales; operaciones con transformaciones lineales, suma, resta y multiplicación en escala. Es el modo práctico de encontrar los autovalores y ortovectores.

Es una verdadera guía didáctica para todo investigador serio, docente y estudiante del nivel universitario.

ISBN: 978-612-4097-78-2

9 786124 097782

UAP UNIVERSIDAD ALAS PERUANAS

Fondo Editorial

ÁLGEBRA LINEAL se desarrolla en cinco unidades didácticas: Matrices y determinantes; Sistema de ecuaciones lineales; Vectores en R^2, R^3 y R^n; Espacios y sub espacios vectoriales/transformaciones lineales, y, por último, Autovectores y autovalores/diagonalización de matrices.

Cada unidad didáctica cumple con el objetivo general y los objetivos específicos. Los contenidos disponen de información precisa, detallada, objetiva y sostensible los temas programados en un lenguaje sumamente denotativo.

Los contenidos más importantes son secuenciales en cada unidad. Se inicia con un esquema de contenidos sobre la matriz y sus operaciones. Las ecuaciones lineales, las formas algebraicas y matriciales para llegar a los vectores y tipos de sistemas. Definición y notación vectoriales en R^2, R^3 y sus propiedades. Los espacios vectoriales; operaciones con transformaciones lineales, suma, resta y multiplicación en escala. Es el modo práctico de encontrar los autovalores y ortovectores.

Es una verdadera guía didáctica para todo investigador serio, docente y estudiante del nivel universitario.

ISBN: 978-612-4097-78-2

9 786124 097782

UAP UNIVERSIDAD ALAS PERUANAS